JUAN RIUS–CAMPS

EQUILIBRIO DE LA BICICLETA

EDICIONES ORDIS

EDICIONES ORDIS

GRAN VIA DE CARLOS III, 59, 2º, 4ª
19 de Marzo de 2010
08028 BARCELONA

i

EQUILIBRIO DE LA BICICLETA

Resulta muy difícil explicar el equilibrio de un ciclista (bicicleta, moto, patinete, etc.) acudiendo a las fuerzas centrífugas de la DC; si el movimiento es muy lento, pueden resolver el problema. Cuando la velocidad es grande la trayectoria se puede mantener prácticamente recta, sin dificultad, con casi imperceptibles giros del manillar a derecha e izquierda. En este caso el radio de curvatura ρ de la trayectoria se puede considerar *infinito* y las precedentes fuerzas resultan nulas, con lo que el equilibrio queda sin resolver.

El movimiento es sobre un plano horizontal con la fuerza de gravedad normal al mismo. Todo referido al triedro de FRENET (***s, n, b***) en reposo respecto al marco inercial de referencia OXYZ .

Al girar el manillar, muy levemente si la velocidad es grande, para mantener el equilibrio, el sistema adquiere una energía de rotación:

$$E_{rot} = (1/2)I\omega^2 \qquad (1)$$

que es *absoluta,* pues la rotación $\boldsymbol{\omega}$ no varía al cambiar de marco inercial de referencia. Supuesta la velocidad v *constante* en este mínimo giro, la energía cinética $(1/2)mv^2$ debe *perder* o *ganar* la energía E_{rot} (1) transferida a la rotación según que ésta *aumente* o *disminuya;* pero por la conservación de la energía la única posibilidad es que la masa m *no sea constante*, es decir, aumente o disminuya en una cantidad dm , dando lugar a la presencia del factor $dm/dt = \dot{m}$, positivo o negativo.

En la ND la *fuerza total,* sobre la masa m en movimiento (ciclista + bicicleta) viene dada por la expresión[1]:

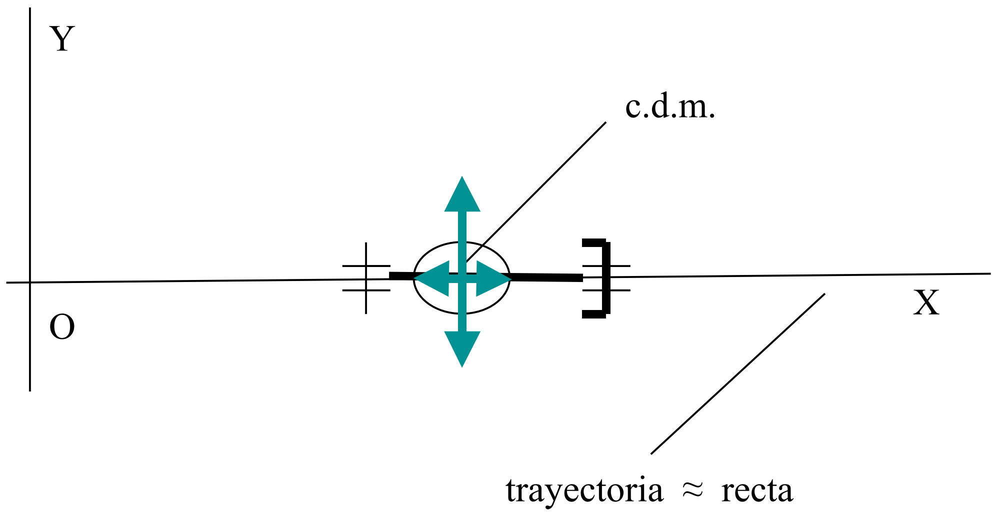
$$\boldsymbol{F} = m\dot{v}\boldsymbol{s} + \tfrac{1}{2}\dot{m}\boldsymbol{v} - m\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n} - mv\frac{\dot{v}}{\dot{\rho}}\boldsymbol{n} - \tfrac{1}{2}\dot{m}\frac{v^2}{\dot{\rho}}\boldsymbol{n} \qquad (2)$$

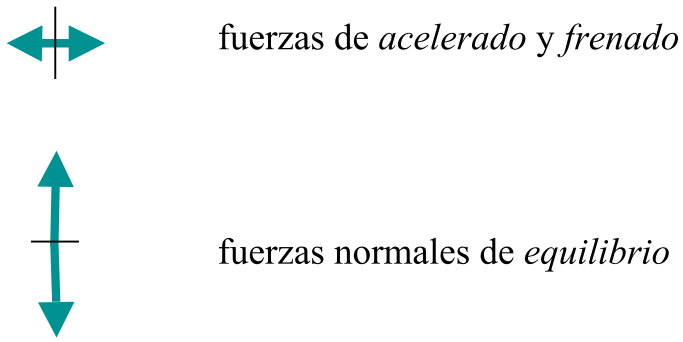
Siendo *constante* la velocidad $\boldsymbol{v}$, resulta *nula* la aceleración tangencial $dv/dt = \dot{v} = 0$, Además, al considerar *infinito* el radio de curvatura ρ , la (2) se reduce a:

[1] *Vid.* JUAN RIUS–CAMPS, *Dinámica de Sistemas Mecánicos Irreversibles* . Ed. ORDIS. Barcelona. 2009.

$$\boldsymbol{F} = \tfrac{1}{2}\dot{m}\boldsymbol{v} - \tfrac{1}{2}\dot{m}\,\frac{v^2}{\dot{\rho}}\,\boldsymbol{n} \qquad (3)$$

Al ser *dm/dt* *positivo* o *negativo* , el primer término de (2) es una fuerza, que tiende a *acelerar* o *frenar* el móvil, mientras que el segundo se traduce en una fuerza, no nula, *normal a la trayectoria*, que actúa a *derecha* e *izquierda* de la misma, impidiendo la caída del ciclista (ver ESQUEMA).





ESQUEMA

NOTA

1. Para facilitar la comprensión incluimos a continuación el estudio de la *Aceleración Normal Suplementaria* ANS, punto de partida de la ND.

i

ACELERACIÓN NORMAL SUPLEMENTARIA

SENTIDO CINEMÁTICO DE LA VELOCIDAD ANGULAR ω^*

1. Partimos de la trayectoria real de un punto material m, y para su estudio local utilizamos un referencial de inercia $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{n}$, *intrínseco*. cuyos sentidos positivos vienen dados por el de la velocidad para $\boldsymbol{s}$; hacia la convexidad para $\boldsymbol{n}$; y por $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{n}$. Necesitamos considerar también la *evoluta* de la misma referida a los mismos ejes (ver Fig. 1, en el caso $dv/dt > 0$, y Fig. 2, en el caso $dv/dt < 0$).

Para explicar el sentido cinemático de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}^* = dv/d\rho$, vamos a estudiar un elemento de trayectoria $\boldsymbol{ds}$ que se corresponde con el $\boldsymbol{d\rho}$ de la *evoluta;* ambos están situados en el plano osculador (ver Fig. 1 cuando $dv/dt > 0$ y Fig. 2 cuando $dv/dt < 0$). Así pues, podemos considerar la trayectoria localmente plana y referida a una base inercial intrínseca de versores $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$, formada por la *tangente,* la *normal* y la *binormal*. El *arco* $\boldsymbol{ds}$ de trayectoria, está determinado por los puntos A, B, y el $\boldsymbol{d\rho}$ de la *evoluta*, por sus homólogos A, B.

La velocidad de la partícula en A, es v, y en B, $v+dv$. Los radios de curvatura en estos puntos son: $\rho+d\rho$ y ρ. El ángulo girado por el radio de curvatura al pasar de A a B es:

$$d\theta = ds/\rho$$

y la correspondiente velocidad angular será:

$$\omega = d\theta/dt \qquad (\text{con} \quad \boldsymbol{\omega} = \omega\,\boldsymbol{b})$$

También se puede escribir: $\omega = v/\rho$, que no depende, obviamente, de dv ni de $d\rho$. Al calcular la aceleración centrípeta llegamos a su expresión:

$$\boldsymbol{a}_\rho = (-v^2/\rho)\boldsymbol{n} \qquad (1)$$

en la que no se consideran los incrementos dv , $d\rho$, pues no le afectan. Es el resultado de sustituir el $\boldsymbol{ds}$ de trayectoria por el correspondiente en círculo osculador en el punto. Sin embargo si observamos con detalle la *trayectoria real*, ésta viene caracterizada por tener una *evoluta* bien determinada (ver Fig. 1 y Fig. 2). Al prescindir de dv , en el estudio de la aceleración centrípeta, significa que partiendo del punto A llegamos al B', pero no al punto real B; y lo mismo cabe decir de sus homólogos centros de curvatura: el A está situado en la *evoluta,* por ser el punto de partida, pero el B' está situado fuera de la *evoluta* real (ver Fig. 1 y Fig. 2), cuyo punto es el B. Es evidente que la aceleración centrípeta está correctamente determinada, pero también resulta claro que el arco de *evoluta* $\boldsymbol{d\rho}$ debe coincidir con el determinado por los puntos A , B de las figuras, y no por los A , B', como sucede al prescindir de dv y de $d\rho$. Para corregir esta deficiencia será necesario girar AB' un ángulo:

$$d\theta^* = BB'/d\rho$$

para que coincida con $\boldsymbol{d\rho}$ de la *evoluta real,* con una velocidad angular *finita* cuyo módulo viene dado por:

$$(BB'/d\rho)/dt = (d^2s/d\rho)/dt = dv/d\rho = d\theta^*/dt = \omega^*$$

Esta velocidad angular indica que la simplificación de sustituir, en cada punto, la trayectoria por el círculo osculador, lleva implícita la necesidad de girar el *arco* de *evoluta*, con velocidad angular $\boldsymbol{\omega^*}$, para que coincida con el *arco real.* Pero este *arco* AB' de *evoluta* debe ser *normal* al homólogo AB'' de la *trayectoria,* girado también $d\theta^*$ respecto al inicial AB (ver Fig. 1 y Fig. 2). Será preciso girar este arco AB' de *evoluta* un ángulo $d\theta^*$, en el *mismo sentido* cuando $dv/dt > 0$ y en sentido *opuesto* cuando $dv/dt < 0$, para que coincida con el *real* AB , y lo mismo en la *trayectoria.* Consecuencia de esto es que el radio de curvatura ρ se incrementa en el diferencial de segundo orden:

$$B'B'' = ds\,d\theta^* \qquad (\text{con } dv/dt > 0)$$

$$B'B'' = -ds\,d\theta^* \qquad \text{(con } dv/dt < 0\text{)}$$

del que resulta una *aceleración normal adicional*:

$$\boxed{\begin{array}{ll} a_\rho^* = B'B''/dt^2 = ds\,d\theta^*/dt^2 = v\omega^* & \text{(con } dv/dt > 0\text{)} \\ a_\rho^* = B'B''/dt^2 = -ds\,d\theta^*/dt^2 = -v\omega^* & \text{(con } dv/dt < 0\text{)} \end{array}}$$

superpuesta a la *aceleración centrípeta* $a_\rho = -v^2/\rho = -v\omega$ (1). Así pues, la *aceleración normal total* será:

$$a_\rho + a_\rho^* = -v(\omega - \omega^*) \qquad \text{(con } dv/dt > 0\text{)}$$

$$a_\rho + a_\rho^* = -v(\omega + \omega^*) \qquad \text{(con } dv/dt < 0\text{)}$$

)
respectivamente.

La *aceleración tangencial* $a_s = dv/dt$ evidentemente no cambia. En expresión vectorial podemos escribir:

$$a_s\boldsymbol{s} + a_\rho\boldsymbol{n} + a_\rho^*\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a} + v\omega^*\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega}^* \qquad \text{(con } dv/dt > 0\text{)}$$

$$a_s\boldsymbol{s} + a_\rho\boldsymbol{n} + a_\rho^*\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a} - v\omega^*\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega}^* \qquad \text{(con } dv/dt < 0\text{)} \qquad (2)$$

2. Ahora, desde el punto de vista dinámico, si deseamos calcular correctamente la *fuerza centrípeta total*, debemos considerar la *aceleración normal total* (2). La expresión de esta fuerza será:

$$\left.\begin{array}{ll} \boldsymbol{f_n} = -mv(\omega - \omega^*)\boldsymbol{n} = m\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^*) & \text{(con } dv/dt > 0\text{)} \\ \boldsymbol{f_n} = -mv(\omega + \omega^*)\boldsymbol{n} = m\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}^*) & \text{(con } dv/dt < 0\text{)} \end{array}\right. \qquad (3)$$

i

De la (2) y (3) se sigue que la *fuerza total* en la ND es:

$$\boldsymbol{f} = m_o(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega}^*) \qquad \text{(con } dv/dt > 0\text{)}$$

$$\boldsymbol{f} = m_o(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega}^*) \qquad \text{(con } dv/dt < 0\text{)}$$

que es isomórfica con la "Fuerza de LORENTZ" del electromagnetismo:

$$\boxed{\boldsymbol{f_o} = m_o(\boldsymbol{E_o} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B_o})}$$

Sorprendente resultado; más todavía si tenemos en cuenta que la expresión de la "Fuerza de LORENTZ" es exclusivamente experimental. Además, en el triedro de FRENET el módulo v de la velocidad es siempre *positivo* en el *sentido* en que se mueve la partícula. Sabemos que mientras el móvil describe la trayectoria el centro de curvatura describe la *evoluta;* en esta última el signo de $d\rho$ es también *siempre positivo.* Al invertir el sentido de recorrido *cambia el sentido los versores* $\boldsymbol{s}$ y $\boldsymbol{b}$ en el triedro de referencia; así $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{s}$ pero dv se cambia en $-dv$ con $(-dv/d\rho)\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{\omega}^*$ El resultado de que ahora la *aceleración normal suplementaria:*

$$a_\rho^* = B'B''/dt^2 = dsdv/dt = v\omega^*$$

pasa a ser:

$$-a_\rho^* = B'B''/dt^2 = ds(-dv/dt) = -v\omega^*$$

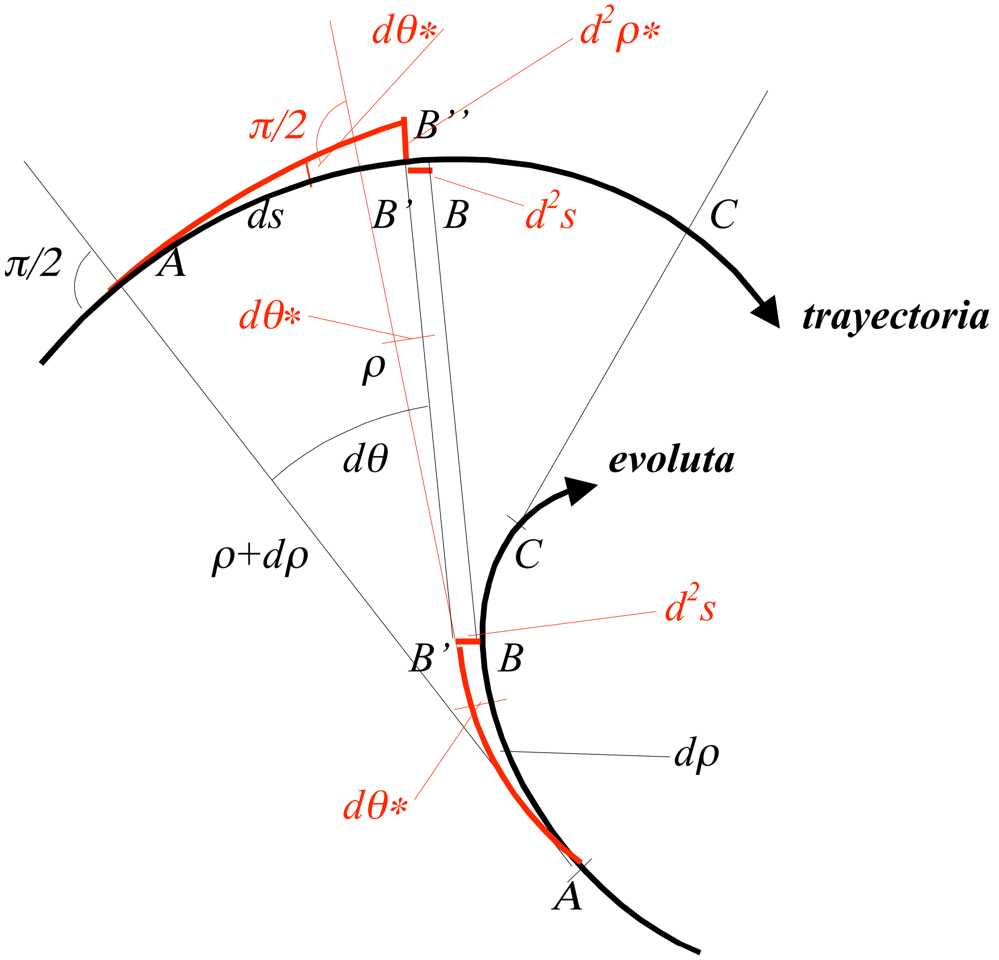
y en expresión vectorial:

$$-\boldsymbol{a}_\rho^* = -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega}^*$$

inversa a la precedente al cambio de sentido del movimiento (ver expresiones (2) y (3) y Figs. 1, 2 y 1' , 2' al final).

En consecuencia, si un punto material describe una determinada trayectoria y se *invierte el sentido de recorrido,* ésta resulta inalterada en el marco de la DC; es ***reversible.*** Sin embargo no sucede lo mismo en la ND, pues la trayectoria de "vuelta" ya no coincidirá con la de "ida"; es ***irreversible.***

La ***irrevesibilidad*** en ***Termodinámica;*** el ***CAOS***, descubierto en muchos fenómenos físicos; etc. es consecuencia de dicha ***irreversibilidad.***

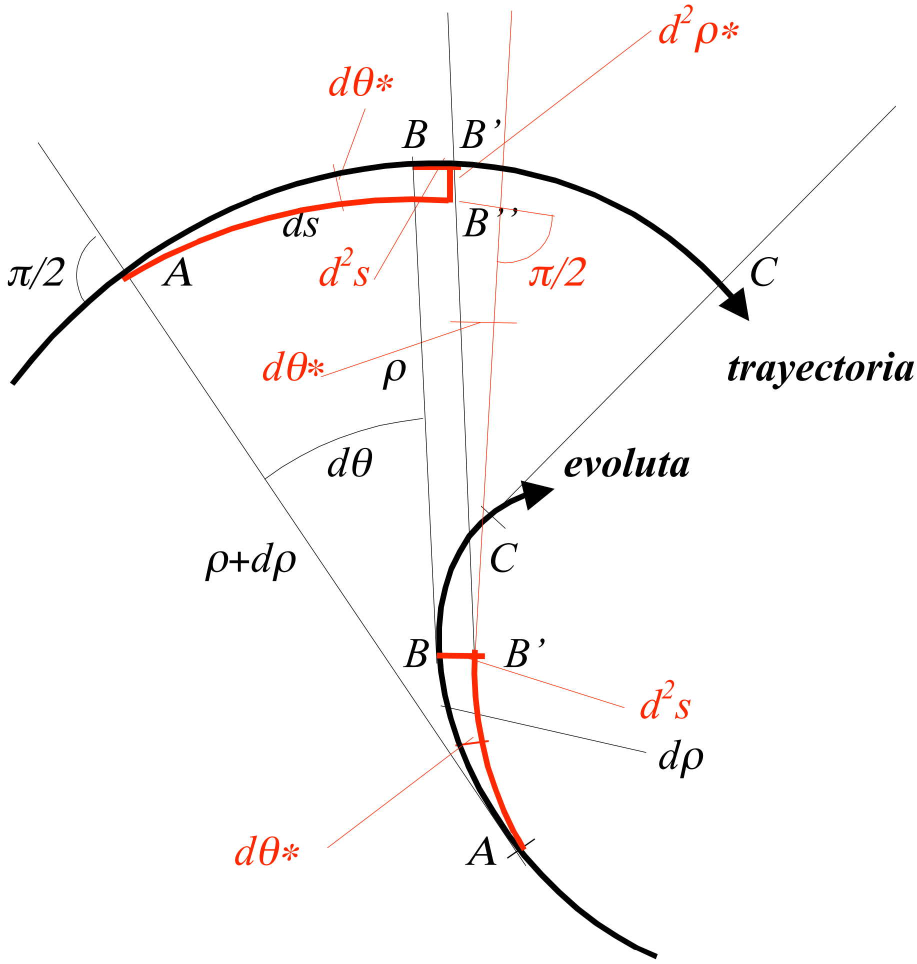


Aceleración Normal Suplementaria (cuando *dv/dt < 0)*

$$a_n{*} \;=\; d^2\rho{*}/dt^2$$

FIG. 1

i

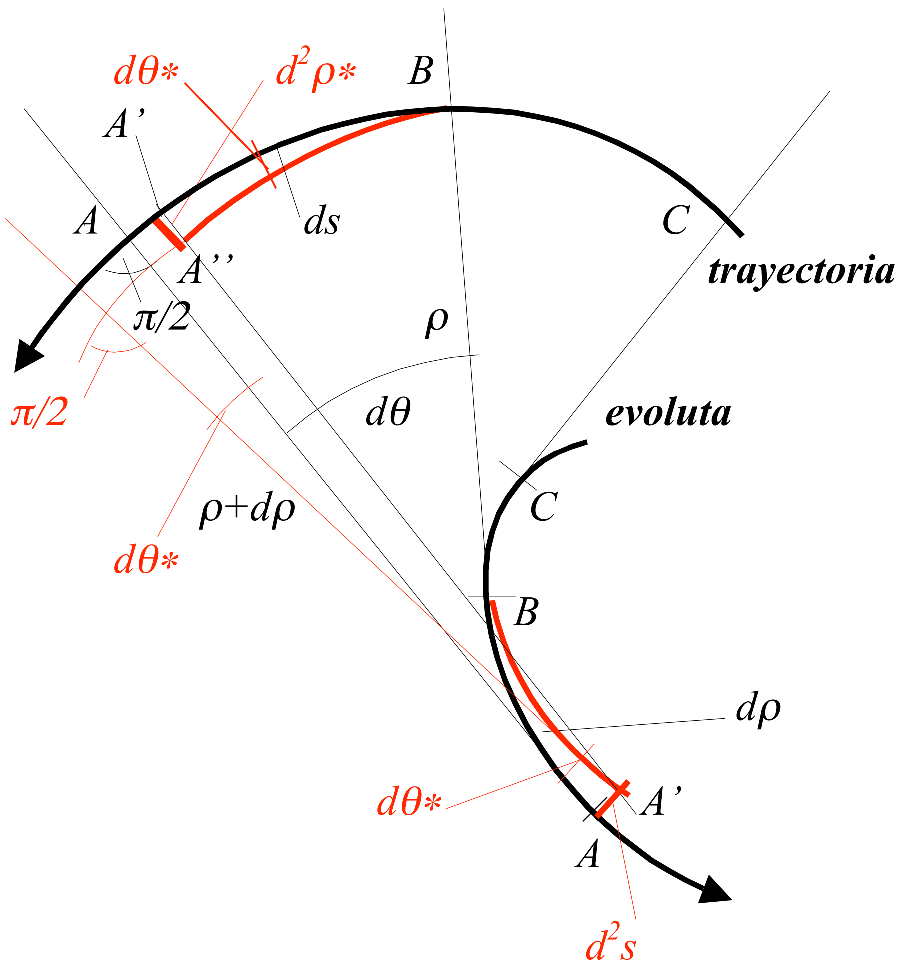


Aceleración Normal Suplementaria (cuando *dv/dt > 0*)

$$a_n* \;=\; d^2\rho*/dt^2$$

FIG. 2

i



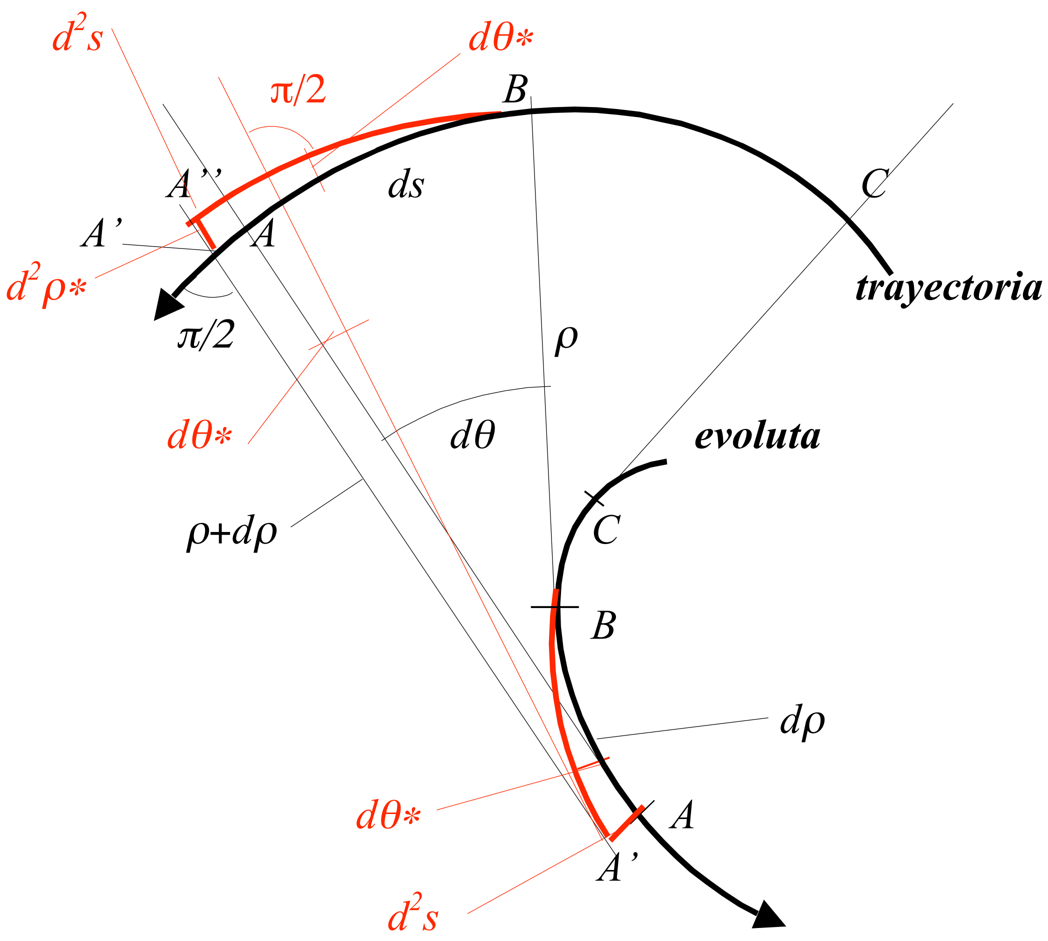
Aceleración Normal Suplementaria

(en recorrido inverso, siendo ahora $dv/dt < 0$*)*

$$a_n^* \;=\; d^2\rho^*/dt^2$$

FIG. 1'

i



Aceleración Normal Suplementaria

(en recorrido inverso, siendo ahora dv/dt > 0)

$$a_n{*} \;=\; d^2\rho{*}/dt^2$$

FIG. 2'

i

Juan RIUS – CAMPS

Doctor Arquitecto,
Ex profesor de la UNIVERSIDAD DE NAVARRA.
Miembro de la REAL SOCIEDAD ESPAÑOLA DE FISICA.

Dirección:

Gran Via de Carlos III, 59, 2º, 4ª,
08028, BARCELONA.

E-mail   jsriuscamps@coac.net
E-mail   john@irrevresiblesystems.com

Página web: irreversiblesystems.com

Tel :   93 - 330 10 69

BARCELONA, 19 de Marzo de 2010

i