

JOHN RIUS-CAMPS

**THE DYNAMICS OF IRREVERSIBLE
MECHANICAL SYSTEMS**

(AND SPANISH VERSION)
26TH FEBRUARY 2009

ORDIS EDITIONS

ORDIS EDITIONS

GRAN VIA DE CARLOS III, 59, 2º, 4^a
BARCELONA 08028

CONTENTS

INTRODUCTION p. 7

CHAPTER I SYSTEM OF MATERIAL POINTS p. 11

- A. FOUNDATIONS
- B. STUDY OF THE EXPRESSION OF FORCE IN THE NEW DYNAMICS (ND)
- C. MECHANICAL ENTROPY: SECOND FUNDAMENTAL LAW
- D. KINEMATIC MEANING OF ANGULAR VELOCITY ω^*

**CHAPTER II WAVE EQUATIONS AND
"MAXWELL'S EQUATIONS"** p. 31

- A. DETERMINATION OF THE WAVE EQUATION WHEN $U_p = U_p (P, t)$
- B. DEDUCTION OF "MAXWELL'S EQUATIONS"

CHAPTER III EXPERIMENTAL TESTS p. 49

INTRODUCTION.

1. The following study corresponds to the largest and most complete of a series of studies begun in 1974 on the *Foundations of Dynamics*¹. It was published for the first time and with the same title in 1985. Now it has been reprinted, with the opportune corrections and additions, in the light of the most up-to-date theoretical and experimental investigation.

The first chapter, and the section which deals with the foundations, contain a summary of the ideas expounded in more detail and at greater length in earlier investigations, in which at first by intuition and later more systematically, a *metaphysical* criticism was made of the "Newtonian

¹ These studies were commenced during the Seventies; the most significant officially registered ones are:

Algunas consideraciones acerca de las Ecuaciones Cardinales de la Dinámica y el Segundo Principio de la Termodinámica. Pamplona. 1974.

La afirmación del "Principio de MACH" y sus consecuencias Dinámicas. Ed. ETSA, University of Navarre. Pamplona. 1975.

Los Fundamentos Cosmológicos de la Mecánica y las Leyes Fundamentales de la Dinámica, Ed. Anuario filosófico, University of Navarre. Pamplona. 1976.

Sustentación no aerodinámica de determinados Insectos. Barcelona. 1977.

Metafísica de la Dinámica y sus consecuencias Físicas. Barcelona. 1978.

Dinámica del Punto Material. Barcelona. 1981.

Dinámica de Sistemas Mecánicos Irreversibles. Barcelona. First edition 1985.

p. 41. This study –which is now being reprinted in a revised and amplified edition– gathers together the most essential and valid points of the preceding works from the exclusively physical point of view.

El Vuelo del Abejorro. "Investigación y Ciencia", Barcelona. February 1986. This article expounds the experimental tests carried out on hymenoptera: *Bombus terrestris* ("Bumblebee") and on Diptera: *Calliphora vomitoria*. They fly perfectly well in a very thin atmosphere (13 mb , equivalent to 98.7% of normal atmospheric pressure: 1013 mb , and at a temperature of 15° C) with only the partial pressure of water vapour, at room temperature, so that the insect does not become deformed. The insect maintains its flight, even when hovering, for a maximum of 2 minutes ; the test can often be repeated after it has recovered from anoxia.

Formulación Mecánica de la Entropía de un Sistema, Barcelona, 1992. This investigation studies thermodynamic entropy starting out from the concepts of kinetic energy and potential energy in which the internal energy of a closed system is definitively transformed.

Principles" of Classical Dynamics (CD)². These led us to formulate the Fundamental Laws which form the basis of a New Dynamics (ND) of which the former is a particular and restricted case. Problems of high velocities, which correspond to the Special Theory of Relativity (STR), are not tackled, and neither are those pertaining to Quantum Dynamics.

Starting out from the *Three Fundamental Laws* and the expression of kinetic energy: $U_c = (1/2)mv^2$, of a particle (or a system of material points), which are accepted axiomatically, we come to the formulation of *force* in this ND which turns out to be *isomorphic* with "LORENTZ's force" in electromagnetism. The need for an *inertial framework* for reference, at rest in relation to the centre of mass (CM) of the system which is being studied (energetically closed and unbound to the rest of the Universe except for the inertia), forms part of the essence of the *Third Fundamental Law* of the ND.

2. From the formal point of view it is remarkable and surprising to be able to deduce "MAXWELL's equations" of Electromagnetics as a special and limit case of the ND, instead of postulating them with regard to experimental laws which were discovered earlier (FARADAY, AMPÈRE, etc.). Analogous laws govern the behaviour of other "fields of force" (for instance, gravitational) and other dynamic interactions. The basic incompatibility between Dynamics and Electrodynamics ceases to exist.

Likewise, it is clearly possible to bridge Dynamics and Quantum Dynamics: DE BROGLIE's "waves of matter" fall within the sphere of the ND; "particle" and "wave" are aspects of the same formulation.

Irreversibility, which is the essence of the Second Principle of Thermodynamics, is the statistical consequence of the fact that the trajectories of the material points are irreversible in the ND, apart from singular cases.

Logically, this ND takes us back to the CD in particular cases and in those which, although not exact, it is sufficiently approximate: small accelerations and speeds, fields which are slowly variable with time, etc.

² *Los Fundamentos Cosmológicos de la Mecánica y las Leyes Fundamentales de la Dinámica*, Pamplona, Anuario filosófico, University of Navarre, 1976, Vol. IX, pp. 325-378. This study was reprinted in 1993, with some obscure and even erroneous expositions rectified, owing to subsequent discoveries, both theoretical and experimental; nevertheless, the conclusions remain essentially the same.

The presence of ***CHAOS*** is an immediate consequence of the ***IRREVERSIBILITY*** of this ND.

Barcelona, 26th June .2005

Revised: Barcelona, 26th February .2009

CHAPTER I

SYSTEM OF MATERIAL POINTS.

A. FOUNDATIONS.

1. Until now the First Newtonian Principle postulated the existence of physically isolated systems; but although the idea of isolation in relation to external influences is feasible, a separation of this kind is not in actual fact possible. The existence of a property of matter –*inertia*– makes it impossible, since inertia is nothing other than the response of "the rest of the Universe" to the presence of matter in the system in question. Thus inertia is partly an *internal* property and partly *external* to the system; the "forces of inertia" which until now were described as "fictitious" or "pseudo forces", are *real, external* forces acting on the system. In this exposition it is of course assumed that we are using a frame of inertia in the afore-mentioned conditions as reference for the system (in the first approximation in a rectilinear, uniform movement in relation to COPERNICUS' axes), otherwise it would not make sense to speak of accelerations; this clearly reveals the essence of "MACH's Principle". If the frame or basis for reference is not inertial, then it is possible that "fictitious" or "apparent" forces may appear owing to the fact that the coordinated axes of reference are not specific ones. The axes which correspond to a reference for inertia are, then, very specific; they are determined at least from a constant velocity vector, from the dynamic point of view.

Up until now, *attempts to determine an absolute referential have failed* if we look at the results of MICHELSON-MORLEY, TROUTON-NOBLE, etc.; nonetheless, the homogeneity and isotropy which correspond to the "red shift" show that our solar system has, at most, a velocity of 300 km/s in relation to the frame of inertia determined by the stars and galaxies taken as a whole. This velocity suggests the presence of a *cosmological substratum* –completely at rest, since there is nothing to indicate its movement– in which to place the "fundamental observers" and of which the stars and galaxies are like beacons telling us of its situation. This substratum is metaempiric, that is, it avoids direct experience, but this does not exclude its existence, which is required by considerations which

existed before physical experimentation, that is, its necessity is metaphysical. Even if MACH were fundamentally antimetaphysical, his "Principle" is nothing other than the affirmation of the necessary physical presence of a substratum of this kind; he says: "The only accelerations which make sense are measured regarding the frame determined by the distant stars as a whole". However, according to what we said earlier about the "red shift", not only accelerations but even velocities require a privileged reference; in the first case it is enough that the velocity of the reference frame is constant, in the second an absolute reference which excludes all indetermination is required, even if it is only a constant vector.

2. The First Newtonian Principle must be rectified by affirming instead that *inertially isolated systems do not exist*, with the exception of the Cosmos considered as a whole. The success of CD based on NEWTON's "First Principle" is due to the fact that, at first sight, a large number of dynamic systems behave as if they were isolated; but this is actually a very strong restriction which should have been detected and rectified a long time ago. The postulation: "the CM of an isolated system moves with a constant velocity" incurs the contradiction of a metaphysical rather than physical nature, since this "constant velocity" is such with regard to an inertial frame (COPERNICUS' axes at least) and this frame is different, *external*, to the system in question. And when we postulate its "isolation" we cannot define this constant vector, nor even its direction which could be seen from the inertial frame, as we cannot refer to it if the system is "isolated"³. The declaration of the First Principle therefore implies a contradiction which we can express as: "an isolated system has the property of not being isolated".

On the other hand a contradiction with a metaphysical basis must have physical consequences; this means that a theory of Dynamics, based on this Newtonian theory, must deviate from physical reality; and not only in those cases anticipated by the STR for high velocities, but also in those in which up until now it was considered perfectly valid⁴.

3. If we replace the first Newtonian postulation by the

³ P. HOENEN, *Filosofía della Natura Inorganica*, Brescia, Ed. La Scuola, 1949, p.124 &c.

⁴ For a detailed study of this aspect in relation to the metaphysical foundations of the ND, see our publication: *Los Fundamentos Cosmológicos de la Mecánica y las Leyes Fundamentales de la Dinámica*, Philosophical Yearbook, University of Navarre, Vol. IX, 1976. Reprinted, revised and updated, in 1993.

statement: *there are no isolated systems*, we come to the essence of what we have called the *Third Fundamental Law* of ND. The *First Fundamental Law* of this ND is simply the conservation of energy in a closed system. What is the *Second Fundamental Law*? It refers to the *irreversibility* of the dynamic processes considered by the ND, apart from exceptional cases; we shall look at it in detail in the following sections of this chapter. The ND must be structured on the basis of these starting points. The Second and Third Principles of the CD will only be partly valid, as they lead us to the laws of conservation of *lineal momentum* and *angular momentum* in an isolated system and, as we shall see, this is not always possible in the ND framework which we are putting forward here. We embarked on this investigation some years ago, especially from 1974 on, when the first officially registered studies were published; since then we have constantly penetrated more deeply in the investigation of the ND. In the work we undertook prior to 1981 we had maintained constant the mass m of a physical particle which was subject to non-conservative potential energy, that is, dependent on position and time (and both variable independents): $U_p = U_p(P, t)$; from then on it was clear that in this general case it had to be: $m = m(t)$. This will be seen in greater detail in the next section.

B. STUDY OF THE EXPRESSION OF FORCE IN NEW DYNAMICS (ND).

1. By way of introduction it must be said that in this ND we can no longer set out from the Newtonian "Fundamental Equation", which gave us the expression of force, as it would only be valid in singular cases, as a result of what we said before. However, in order to construct the ND we must set a starting point which enables us to elaborate the new theory; the CD is a particular case of this. This starting point, in the framework of the *Three Fundamental Laws*, is the assertion that kinetic energy in a system of particles can be expressed thus:

$$U_c = (1/2)mv^2$$

when m is the total mass of the system and v is its *average quadratic speed*. This energy is the sum of the kinetic energy in each one of the system's particles, which satisfy analogous expressions. We are not considering relativistic problems with high speeds here. As we shall see

later on, the mass of the system in this ND is not necessarily a constant, but instead it generally depends on time. Normally, and while it is not particularly specified, we will assume that the system has an inertial Cartesian frame of coordinates for reference.

In Classical Dynamics the potential energy of a system is said to be conservative if it depends only on the position of the particles, that is, it is independent of time. This energy cannot generally be written as the sum of potential energy in each particle –as is the case with total kinetic energy–: its expression is *global*, as it depends on the position of all the masses in the system, and it is not possible to assign to each one of them a potential energy which depends exclusively on its position. It is nonetheless possible to give each particle a potential energy which depends on both position and time; this can be done by simply making the coordinates and the velocities of the other bodies in the expression of the total energy dependent on time. In an energetically closed system, for each particle m –if we call $U_{pi}(P_i, t)$ its potential energy and $U_{ci}(P_i) = (1/2)m_i v_i^2$ its kinetic energy– we can write by virtue of the *First Fundamental Law*

$$U_{ci}(P_i) + U_{pi}(P_i, t) = C_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (1)$$

in which

$$U_{pi}(P_i, t) = \sum_j U_{cj}[P_j(t)] + U_p^{(i)}[P_i, P_1(t), P_2(t), P_{i-1}(t), P_{i+1}(t), \dots, P_n(t)]$$

And the result when these are all put together extends to all the variables *except (i)*. For the system of n particles m_i the result when they are added together the expressions (1), will be

$$\sum_{i=1}^n U_{ci}(P_i) + U_{pi}(P_i, t) = U_c + \sum_{i=1}^n U_{pi}(P_i, t) = C$$

that is

$$U_c + U_p = C$$

which expresses the conservation of energy in the system, as was to be expected. It should be noted that in the expression: $U_{ci}(P_i) = (1/2)m_i v_i^2$

it is always $v_i = v(P_i)$, since velocity, by its very nature, implies a change of place and for this reason *depends on the position* of the particle, except for trivial cases where this functional relationship cannot be established. It is also always possible to make the position depend on time, but it must be stressed that here time is a simple parameter, by which the positional variables can be expressed, and *not an independent variable* as it is with non-conservative potential energy: $U_{pi}(P_i, t)$. In the light of these reflections we can write the (1) as follow:

$$U_{ci}(P_i) + U_{pi}(P_i, t) = C \Rightarrow (1/2)m_i v_i^2 + U_{pi}(P_i, t) = C \quad (2)$$

which gives the paradox that $U_{pi}(P_i, t)$ can be written as a function of the position P_i and independent of time. The only solution, generally, is that mass m_i cannot be considered constant in this ND but must rather be

$$m_i = m_i(t)$$

and thereby it is obviously $(1/2)m_i v_i^2 = U_{ci}(P_i, t)$. This conclusion is clearly of major importance.

2. We are already in a position to find an expression for the force that acts on a particle of mass m which follows a trajectory in relation to a frame of inertia; for the sake of simplicity and clarity we shall start with an idealized case in which the mass is constant and, as a result, the potential is conservative. Since it is a closed system, according to the *First Fundamental Law* it is true that

$$(1/2)m_o v^2 + U_p(P) = C$$

in which $v = v(P)$ and $m = m_o = \text{constant}$. The particle follows a determined trajectory and, since this is known, its kinetic energy depends on a unique variable which determines its position on the same; for instance: the arc travelled from the starting point, the radius of curvature at each point, etc., that is, we are dealing with *intrinsic variables*. Thus, our study of the *force* which acts on the particle when it travels along this

trajectory, is *local*. Let us imagine a differential arc situated on the plane of osculation at point P ; in this way, still speaking in general terms, we can consider the trajectory as being locally plane and as a reference we shall use FRENET's trihedron, whose unitary vectors or *versors* are: \mathbf{s} , \mathbf{n} , \mathbf{b} , according to the *tangent*, *normal* and *binormal*, respectively. We choose as positive senses: that of the velocity of the particle for \mathbf{s} , that which goes towards the convexity of the trajectory for \mathbf{n} , and for \mathbf{b} the dextroturn so that

$$\mathbf{b} = \mathbf{s} \times \mathbf{n} \quad (3)$$

In these conditions we define force according to a variable x on which *all the kinetic energy* U_c of the particle depends

$$\mathbf{F}_x = (dU_c/dx)\mathbf{x} \quad (4)$$

with \mathbf{x} as the corresponding *versor*.

If we apply this definition to the intrinsic variables: trajectory arc s and curvature radius ρ , we shall have respectively

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_s &= (dU_c/ds)\mathbf{s} = (m_o v dv/ds)\mathbf{s} = (m_o dv/dt)\mathbf{s} \\ \mathbf{f}_\rho &= (dU_c/d\rho)\mathbf{n} = (m_o v dv/d\rho)\mathbf{n} \end{aligned} \quad (5)$$

since the variation in the radius of curvature is in accordance with \mathbf{n} . These two forces depend on how the kinetic energy varies, and in this sense no more variables exist, as we can only consider two intrinsic variables in a plane trajectory. However, we must also take into account the *centripetal force* of the CD, which is *not included* in \mathbf{f}_ρ as it does not depend on the variation of kinetic energy but on its value

$$m_o \mathbf{a}_n = -m_o (v^2/\rho) \mathbf{n} = -(2U_c/\rho) \mathbf{n}$$

Consequently, the *total force* acting on m will be the resultant:

$$\mathbf{f}_o = m_o \mathbf{a} + \mathbf{f}_\rho = m_o \mathbf{a} + (m_o v dv/d\rho) \mathbf{n} \quad (6)$$

In which the sign, in accordance with \mathbf{n} , will be $(-)$ if we have chosen as positive the sense towards the convexity (as in this case) and it will be $(+)$ if this sense is towards the concavity. Another expression for the force \mathbf{f}_ρ (5) can be given by writing

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_\rho &= (m_o v dv/d\rho) \mathbf{n} = (m_o dv/d\rho) \mathbf{b} \times \mathbf{v} = \\ &= -\mathbf{v} \times (m_o dv/d\rho) \mathbf{b} \end{aligned}$$

since, because of (3), it is $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{s}$. As $dv/d\rho$ has the dimensions of an angular speed, we can define it as

$$\boldsymbol{\omega}^* = \omega^* \mathbf{b} = (dv/d\rho) \mathbf{b} \quad (7)$$

so that

$$\mathbf{f}_\rho = -m_o \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}^*$$

and from (6) we get

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_o &= m_o \mathbf{a} - m_o \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}^* = \\ &= m_o (\mathbf{a} - \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}^*) \end{aligned} \quad (8)$$

which is *isomorphic* with "LORENTZ's force" of electromagnetism:

$$\mathbf{f}_{em} = q(\mathbf{E}_{em} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{em})$$

The result (8) is surprising: even more so when we remember that "LORENTZ's force" is exclusively experimental. Moreover, in FRENET's

trihedron the value v of speed is always *positive* in the sense in which the particle is moving. We know that while the moving point follows the trajectory, the *centre of curvature*, at the corresponding point, describes the *evolute*, and we can take the sign of $d\rho$ as *positive* because the sense of its movement follows the *changing sense* of the velocity \mathbf{v} . This result is of the major importance (see the two possible cases in Figs. 1, 2', pp. 20, 21) because $\omega = dv/d\rho$ *changes sign*, when the movement is inverted (dv *changes to* $-dv$ whereas $d\rho$, in the *evolute does not change*). When the *movement is inverted*, the *versor* $\mathbf{s} \times \mathbf{b} = -\mathbf{n}$ *manteins its sense*, but the *supplementary acceleration* $\mathbf{a}^* = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}^* = \mathbf{s} \times \mathbf{b} v \omega$ *changes it* when $\boldsymbol{\omega}^*$ *changes to* $-\boldsymbol{\omega}^*$. Consequently, the ***reversibility*** of the trajectory in CD ***does not hold up*** in the ND, (see Figs 1 and 2' , pp. 20-21).

3. We shall now study the case in which $m = m(t)$, in other words, in which (4) is verified

$$U_c(P, t) + U_p(P, t) = (1/2)mv^2 + U_p(P, t) = C \quad (9)$$

We have kept the same definition as in (4) for the force depending on $U_c(P, t)$ which acts on m . We shall simply bear in mind that the kinetic energy will depend on position and time, as shown in (9). We shall now determine the forces acting on m following the preceding process. We shall have:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_s &= (dU_c/ds)\mathbf{s} = (mvdv/ds)\mathbf{s} + (1/2)(dm/ds)v^2\mathbf{s} = \\ &\quad (mdv/dt)\mathbf{s} + (1/2)(dm/dt)v\mathbf{s} \end{aligned}$$

$$\mathbf{f}_\rho = (dU_c/d\rho)\mathbf{n} = (mvdv/d\rho)\mathbf{n} + (1/2)(dm/d\rho)v^2\mathbf{n}$$

and analogously the *total force* on m will now be

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= m\mathbf{a} + (1/2)(dm/dt)v\mathbf{s} + \mathbf{f}_\rho = \quad (10) \\ &\quad m\mathbf{a} + (1/2)(dm/dt)v\mathbf{s} + (mvdv/d\rho)\mathbf{n} - (1/2)(dm/d\rho)v^2\mathbf{n} \end{aligned}$$

and in the light of (8) we can write

$$\begin{aligned}
\mathbf{f} &= m(\mathbf{a} + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}^*) + (1/2)(dm/dt)\mathbf{v}\mathbf{s} + (1/2)(dm/d\rho)v^2\mathbf{n} = \\
\mathbf{f}_o &+ (1/2)(dm/dt)\mathbf{v}\mathbf{s} + (1/2)(dm/d\rho)v^2\mathbf{n} = \\
\mathbf{f}_o &+ (1/2)(dm/dt)\mathbf{v}\mathbf{s} - (1/2)(dm/d\rho)v^2\mathbf{s} \times \mathbf{b} = \\
\mathbf{f}_o &+ (1/2)(dm/dt)\mathbf{v}\mathbf{s} - \mathbf{v} \times (1/2)(dm/d\rho)v\mathbf{b}
\end{aligned}$$

Analogous to the preceding case in which $m = m_o = constant$, we can put:

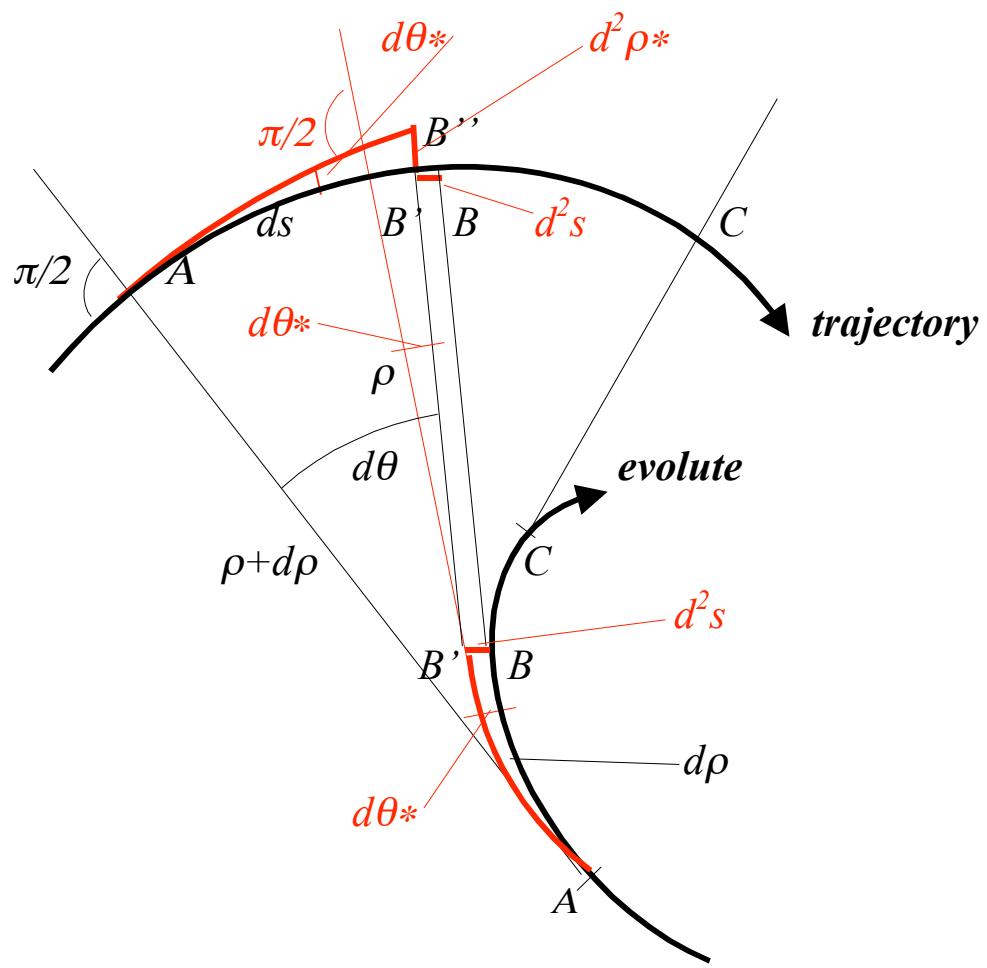
$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= (1/m)[\mathbf{f}_o + (1/2)(dm/dt)\mathbf{v}\mathbf{s}] \\
\mathbf{B} &= -(1/m)(1/2)(dm/d\rho)v\mathbf{b}
\end{aligned}$$

with the result

$$\mathbf{f} = m(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

(11)

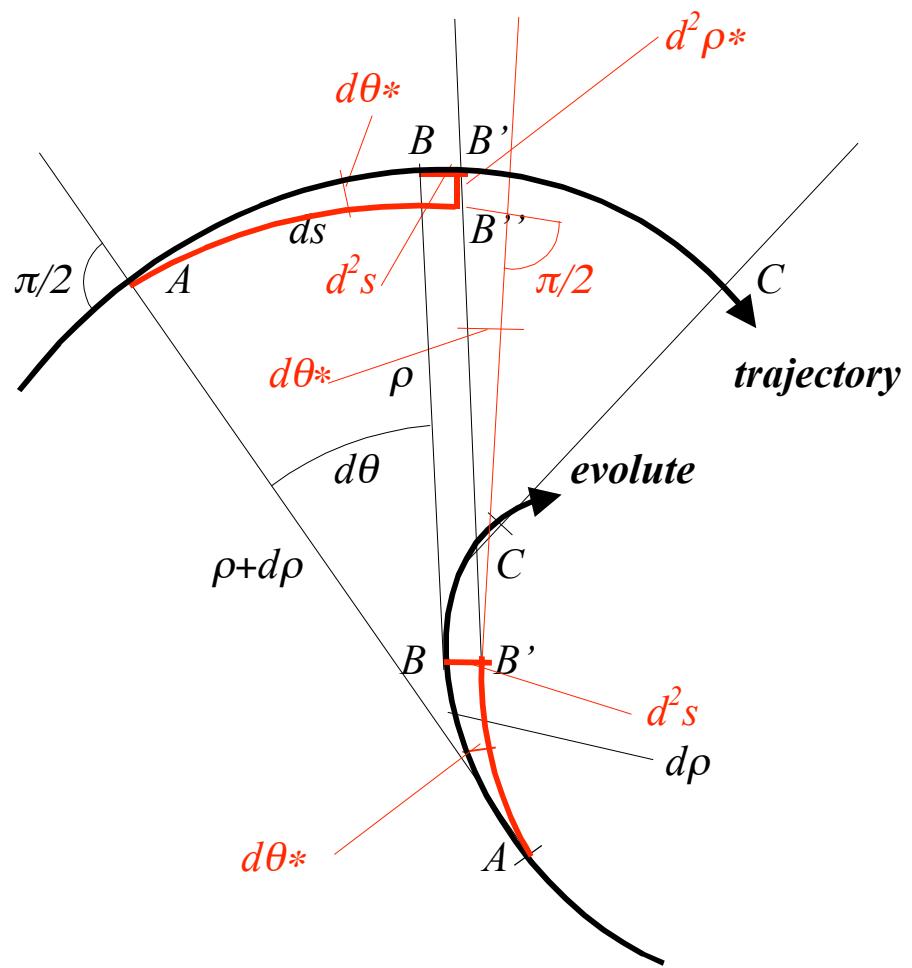
Totally parallel to (8). Starting out from this, and with some complementary hypotheses, equations are deduced for this ND which are isomorphic with those of MAXWELL, which govern all electromagnetism, and which will be expounded in the next chapter. In this ND the forces (11) are no longer *invariant* with regard to "GALILEO's transformations", parallel to what happens with electromagnetic forces.



Supplementary Normal Acceleration (when $dv/dt < 0$)

$$a_n^* = d^2\rho^*/dt^2$$

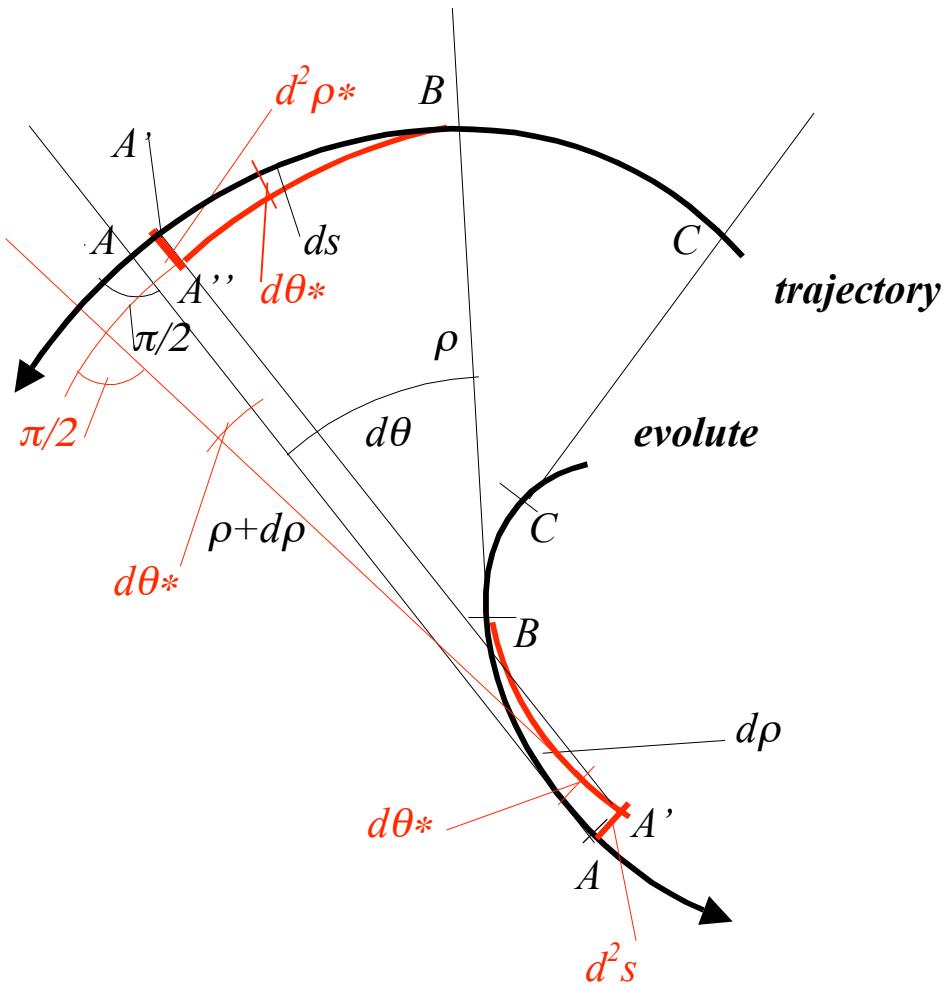
FIG. 1



Supplementary Normal Acceleration (when $dv/dt > 0$)

$$a_n^* = d^2\rho^*/dt^2$$

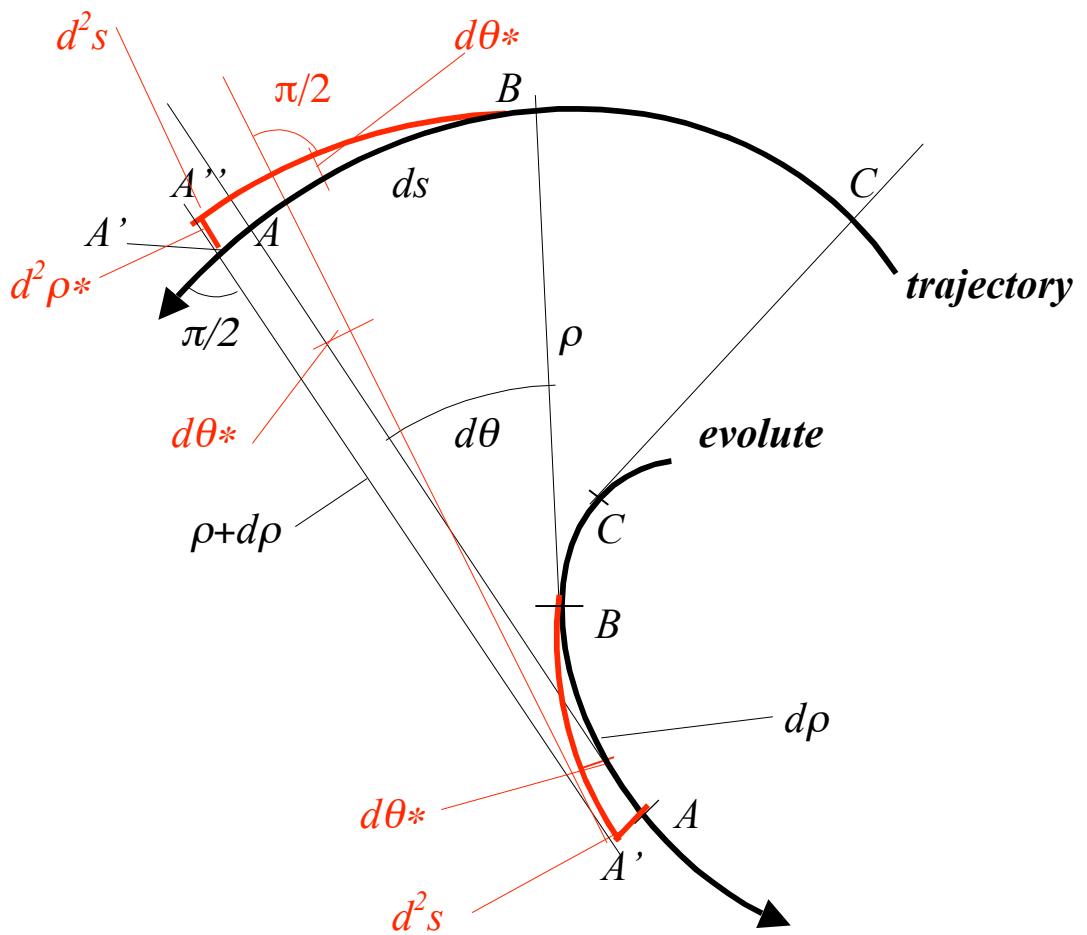
FIG. 2



Supplementary Normal Acceleration
 (running in *inverse direction*, with $dv/dt < 0$)

$$a_n^* = d^2\rho^*/dt^2$$

FIG. 1'



Supplementary Normal Acceleration
 (running in *inverse direction*, with $dv/dt > 0$)

$$a_n^* = d^2\rho^*/dt^2$$

FIG. 2'

In the next section another, completely different method will be expounded for studying the *irreversibility* of mechanical systems in general which, as we have seen, is in the essence of this ND and which we have called the *Second Fundamental Law*. It is a question of establishing a function of state for the mechanical system, which we shall call *mechanical entropy* of the same, which enables us to study the possible situations of *steady equilibrium* which can be obtained.

C. MECHANICAL ENTROPY: *SECOND FUNDAMENTAL LAW.*

1. We shall be looking at *closed* mechanical systems, that is, systems which satisfy the *First Fundamental Law*; we shall define in them a *function of state*, a *mechanical entropy* of the system, which we shall call S , parallel to the entropy which is studied in Thermodynamics. It expresses a *qualitative* characteristic of the system, different from its energetic situation which is governed, from the *quantitative* point of view, by the *First Fundamental Law*: conservation of energy. Mechanical entropy is the quantitative formulation of the energetic qualities of a closed system. With the existence of this function S , clearly expressed and defined, we have a useful instrument which no doubt could be called the *Second Fundamental Law* of Mechanics. This Law, together with the *First*, defines the *evolution* of mechanical processes in systems which are "isolated" from the energetic point of view and which we shall call *closed*. Nonetheless, a system which is closed and unbound to the rest of the Universe cannot properly be called "isolated" since, as we have already seen, there is a quality, the omnipresent *inertia*, which binds together all the systems in the Cosmos: we can thus confirm: "there are no inertially isolated systems". This proposition coincides basically with "MACH's Principle" which we cited earlier (which was already known though less clearly by NEWTON), and can be formulated as: "the only accelerations which make sense are those which refer to movement in relation to the distant stars"; from this arises the necessity of using "inertial frames" in order to construct the theory of Mechanics. As we explained earlier, an assertion of this kind is in the essence of the *Third Fundamental Law*.

The ND is built on these *Three Fundamental Laws* and on the definition of force given in the previous chapter. The First and Second

Newtonian "Principles" are generally invalidated and are only true in certain particular cases. What will happen to the "Third Principle"? Will it still be universally valid? Given the new expression of force in this ND, in which the mass of each particle in a system is, generally speaking, a function of time, the *angular momentum* of the same will obviously not be conserved even if it is *isolated*.⁵ However, the other aspect of the "Third Principle" which requires that the *lineal momentum* be conserved in an isolated system, is also satisfied in this ND : in this case the resultant of all the forces dealt with in this ND is null; the CM (centre of masses in a system) will move in a rectilinear, uniform motion. We say this on the basis of experiments carried out in recent years, without further justification: there exists what we have called "coupling" of the forces which act on the masses in the system, which causes the nullity of the resultant. It is nevertheless possible to "uncouple" these forces if, as a result of their reciprocal movements, there occurs amongst the masses which make up the system a *dissipation* of energy towards the rest of the Universe, and the only way possible since it is *unbound*, is for this dissipation to occur by means of *radiation*; in this case the system ceases to be *closed* and becomes *open*. Thus in an unbound system the linear momentum may be not conserved, against the requirements of CD in parallel circumstances . We have confirmed this point experimentally and will cite some examples in the last chapter.

2. Since S is a *function of state* of the system, it must be independent of the path taken in the system's evolution from one state of equilibrium to another. In order to reach a formulation for it, we shall start out from the customary requirements, adapted to this case, and in axiomatic form:

- it must be *defined positive*.
- it must be *additive* or *extensive*
- it must be *continuous* and *able to be differentiated*.

The kinetic energy U_c of the closed system we are considering, is additive and expressed: $U_c = (1/2)mv^2$, with m as the total mass and v the average quadratic speed. The simplest function for S to satisfy the preceding requirements is

⁵ *isolated system* = energetically *closed* plus *unbound* (without any kind of link).

$$S = \sum m_i v_i \geq 0$$

when v_i is the speed of the particle m_i taken at its absolute value. If we introduce the *average speed* v^* of the system we can then write

$$S = mv^* \geq 0 \quad (12)$$

and as a result of CAUCHY-SCHWARZ's inequality it is

$$S \leq S_{max} = mv$$

In the possible states of steady equilibrium in the system, it must be constant the kinetic energy, that is

$$dU_c = 0 \quad (13)$$

Thus U_c , according (13), must be *constant* (or: *max.*, *min.*, *horitz. inflex.*). but this condition (13) is not generally sufficient. As well there may be systems whose kinetic energy is constant but nonetheless are not in steady equilibrium, they are oscillating; for example, four masses bound together by four rigid bars, in the form of a rhombus, and lain out symmetrically on the same plane; the opposite sides are equal⁶. The rhombus is articulated, so that the masses can oscillate, without colliding, and rotate around an axis which is perpendicular to the plane and which passes through the centre of mass and symmetry. It is clear that, with an initial impetus, they will keep their kinetic energy constant, but it will not be so for each one of the masses. CD solves the problem of their movement by conserving the

⁶ This mechanism, which is only schematic here, can be constructed in such a way that the four masses can slide along their respective guides without colliding. The real mechanism is somewhat more complicated but it is perfectly feasible. As usual, all the elements of the system apart from the four masses: $2m$, $2M$, are considered to be valueless mass.

angular momentum in relation to the axis of rotation, but this requirement does not exist in the ND. What are the possible states of steady equilibrium, if they exist? It is clear that condition (13) is only *necessary* but *insufficient* for situations of steady equilibrium. Since the entropy, defined by (12), will be variable during the evolution of the system (even if the kinetic energy remains constant), we shall insist on a second condition for steady equilibrium:

$$dS = 0 \quad (14)$$

We must remember that now in this ND it will generally be $m = m(t)$. Thus, the two requirements for the equilibrium to be steady are (13) and (14), which when expanded give

$$\begin{aligned} mvdv + (1/2)dmv^2 &= 0 \\ mdv^* + dm v^* &= 0 \end{aligned}$$

and by simplifying the first

$$\begin{aligned} mdv + (1/2)dmv &= 0 \\ mdv^* + dm v^* &= 0 \end{aligned}$$

homogeneous equations –considering the independent variables m, dm – which in order to be compatible require

$$\begin{vmatrix} dv & \frac{1}{2} v \\ dv^* & v^* \end{vmatrix} = 0$$

in other words:

$$v^*dv = (1/2)vdv^*$$

which when integrated gives us

$$\ln v^2 = \ln v^* + \ln A^2 \quad (\text{when } A \text{ is a constant})$$

that is

$$v^2 = A^2 v^*$$

In the general case which we are dealing with here, this last condition requires them to be

$$\begin{aligned} v &= \text{constant} \\ v^* &= \text{constant} \end{aligned}$$

and being now m necessarily constant, also will be $U_c = \text{constant}$; we have steady equilibrium. In short, conditions (13) and (14) are *necessary* and *sufficient* for steady equilibrium in the general case with which we are dealing. If only the first is satisfied, ($U_c = \text{constant}$, max., min. or *horizontal inflection*) the equilibrium will be *unsteady*. If there are identical states of unsteady equilibrium the system will *oscillate*; but it may also happen that it *evolves irreversibly* towards steady equilibrium passing through a finite, or infinite, number of unsteady situations, all different but tending to steadiness in a finite, or infinite time; in the latter case the system's evolution will be *asymptotic*⁷.

In this ND we know, as we have expounded in another study, that when the different trajectories of the physical points m_i which make up the closed system are not circumferences (as it is impossible for them to be rectilinear and for their movement to have a constant velocity except in the case of a single particle) then it is generally true that

$$m_i = m_i(t) \quad \text{and} \quad m = \sum m_i(t) = m(t)$$

and there is no steady equilibrium.

However, there may be states of steady equilibrium, with non-circular trajectories for the $m_i(t)$, in which $m = \text{constant}$ and likewise $v = \text{constant}$; for example: a symmetric spinning top with mass m_1 , with a point of the rotational axis fixed on another mass $m_2 \gg m_1$, and which has a *steady precession* because of the reciprocal gravitational attraction

⁷ The *particular* case can be cited in which, when $U_c = \text{constant}$, S nonetheless is not, but at certain points, and during a dt , it is proved that $dS = 0$ (max., min. or *horizontal inflection*): we shall have *unsteady* equilibrium at these particular points.

which we assume is constant. We can observe that in this case the system remains identical to itself.

In the example mentioned earlier of the symmetrical system comprised of four equal masses, two by two, in the form of a rhombus; this ND anticipates two possible forms of evolution: it will either be a system with identical oscillations and equal periods, or it will evolve in such a way that the trajectories of the four masses come closer, asymptotically, to the circular form (as a singular case: two immobile masses at the axis of rotation and the other two ,those with greater mass, on the circular orbit). Thus the *irreversibility* of the process is clearly shown.

In the above mentioned example of the symmetric spinning top, if the precession is *not steady*, in other words, if there is *nutation*, the ND anticipates the possibility of this practically disappearing after a certain time; in fact, this is what happens in reality. CD cannot account for this phenomenon unless it resorts to loss of rotational energy owing to friction at the point of support; in our opinion this explanation is not very convincing, since for the same reason that it disappeared it could also reappear, if the friction were to continue.

3. It is well known that in the framework of the Three "Newtonian principles" the problem of movement of two interacting bodies is solved, and yet no general solution has been found for the "simple problem of three bodies". Only approximate solutions have been established, by the "perturbations" method, when one of the particles has a superior mass to the other two (for example, the Sun in the solar system). In 1912, SUNDMANN, having overcome serious difficulties, managed to solve this problem by means of this method; but there is no simultaneous solution for the whole system and it is impossible for the general case of three particles with identical masses⁸. *Circular* trajectories are the limit to which the closed system tends when it evolves irreversibly towards steady equilibrium; whether they are of each one of the m_i , or of the centres of mass of various groups of them (as in the above-mentioned case of the spinning top). As we said earlier, it may be that steady equilibrium is unobtainable. Obviously we are studying the system with reference to a basis of inertia at rest in relation to the centre of mass of the same.

This incapacity of CD to solve the problem of systems formed of three or more interacting bodies is surprising. And yet,

⁸ B. FINZI *Meccanica Razionale*, vol. II. p. 89.

Thermodynamics solves the problem of an infinite number of analogous particles (atoms and molecules). The irreversibility which is generally characteristic of systems, according to ND, is generally closely related to the "second Principle" of Thermodynamics, which many scientists consider to be "extremely troublesome and strange"⁹. In our ND the problem is clear and simple: thermodynamic irreversibility is the statistical consequence of the irreversibility of each and every one of the trajectories followed by the particles which make up the system.

Finally, since generally $m = m(t)$, the kinetic energy of a physical particle depends on position and time; it is thus easy to imagine a "wave particle" and to bridge the gap between ND and many of the problems studied by Quantum Mechanics.

The isomorphism between ND and electromagnetism which we have proposed likewise solves the basic incompatibilities of CD with electrodynamics.

⁹ J. MERLEAU-PONTY, *Cosmología del siglo XX*, Madrid, Ed. Gredos. p. 84.

CHAPTER II

WAVE EQUATIONS AND "MAXWELL's EQUATIONS"

A. DETERMINATION OF THE WAVE EQUATION WHEN $U = U(P, t)$

1. Starting with the general expression of force in ND (10), we can arrive at conclusions which are parallel to those which govern electromagnetism. But if we are to proceed with our investigation some additional hypotheses must be made from the expression (9) whose derivative is

$$dU_c(P, t) + dU_p(P, t) = d[(1/2)mv^2] + dU_p(P, t) = 0$$

which we can put in the form

$$[\nabla U_c \cdot \mathbf{v} + \partial U_c / \partial t] + [\nabla U_p \cdot \mathbf{v} + \partial U_p / \partial t] = 0 \quad (15)$$

And now we make the simplified hypothesis which is proved:

$$\begin{aligned} \nabla U_c \cdot \mathbf{v} &= -\nabla U_p \cdot \mathbf{v} \\ \partial U_c / \partial t &= -\partial U_p / \partial t \end{aligned} \quad (16)$$

It is clear that, generally speaking, the correspondence between these two pairs of values which satisfy (15) could be more complicated, but the last one suits

our purpose perfectly¹⁰. Generally speaking, it will also be

$$\nabla U_c \neq -\nabla U_p$$

and if we expand the gradient operator applied to the kinetic energy, we immediately get

$$\nabla U_c = m\mathbf{a}$$

On the other hand we can observe that force \mathbf{f}_o is the component of \mathbf{f} which does not depend on time and the same thing happens with the force defined by $-\nabla U_p$ at the moment when we calculate it, and thus we can write the equality

$$\begin{aligned} \nabla U_p &= -\mathbf{f}_o = -m(\mathbf{a} + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}^*) = \\ &= -m\dot{\mathbf{v}}\mathbf{s} + m(v^2/\rho)\mathbf{n} + (mv\dot{v}/\dot{\rho})\mathbf{n} = \\ &= -m(\mathbf{E}_o + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_o) \end{aligned} \tag{17}$$

On the other hand we had found in (10) the expressions for the vectors \mathbf{E} and \mathbf{B} given by

$$\mathbf{E} = (1/m)[\mathbf{f}_o + (1/2)(dm/dt)v\mathbf{s}]$$

$$\mathbf{B} = (1/m)(1/2)(dm/d\rho)v\mathbf{b}$$

when $\partial U_c/\partial t = (1/2)(dm/dt)v^2$ and with the result (17) the last two can be written as

¹⁰ In "slowly variable" phenomena it will be $|\partial U_c/\partial t| \ll |-\partial U_p/\partial t|$ and $|\nabla U_c \cdot \mathbf{v}| \gg |-\nabla U_p \cdot \mathbf{v}|$. The faster the variation, the more exact those of (19) will be. This recalls the parallelism with electromagnetic phenomena.

$$\mathbf{E} = (1/m)[- \nabla U_p + (1/v)(\partial U_c/\partial t)\mathbf{s}]$$

$$\mathbf{B} = (1/m)(1/v)(\partial U_c/\partial t)(dt/d\rho)\mathbf{b}$$

and on account of hypothesis (16) it is equivalent to:

$$\mathbf{E} = (1/m)[- \nabla U_p - (1/v)(\partial U_p/\partial t)\mathbf{s}]$$

$$\mathbf{B} = -(1/m)(1/v)(\partial U_p/\partial t)(dt/d\rho)\mathbf{b}$$

These last two equations made us think that a "potential vector" could be defined in the following way:

$$\mathbf{A} = (U_p(P,t)/v)\mathbf{s} + \Phi(P) \quad (18)$$

when $\Phi(P)$ is an arbitrary vector, depending only on position, and thus we get

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= (1/m)(-\nabla U_p - \partial \mathbf{A} / \partial t) \\ \mathbf{B} &= -(1/m)(\partial \mathbf{A} / \partial t)(dt/d\rho)\mathbf{b} \end{aligned} \quad (19)$$

These equations are analogous to those which are deduced in electromagnetism starting from "LORENTZ's force". We can calculate the rotational of this potential vector in FRENET's trihedron:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{s} & \mathbf{b} & \mathbf{n} \\ \partial/\partial s & \partial/\partial b & \partial/\partial n \\ U_p/v & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{U_p}{v} \right) \mathbf{b} - \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{U_p}{v} \right) \mathbf{n} = \quad (20)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{U_p}{v} \right) \mathbf{b} = \frac{I}{v} \left(\frac{\partial U_p}{\partial n} \right) \mathbf{b}$$

since, as the movement is locally plane, U_p cannot vary according to the binormal and the velocity v will only vary according to the tangent. Moreover, $\Phi(P) = 0$ has been chosen.

But with the results (20) the component according to the normal of the gradient of U_p is

$$\partial U_p / \partial n = mv(v/\rho + dv/d\rho)$$

so that in the light of (37) we have definitively:

$$\nabla \times \mathbf{A} = m(v/\rho + dv/d\rho) \mathbf{b} = m(\omega^* + \omega) \quad (21)$$

2. If we want it to be proved exactly

$$\mathbf{B} = (1/m) \nabla \times \mathbf{A}$$

we shall have to identify with members of this equality starting from the expressions (18), (19) and (21) and we shall have

$$-\frac{I}{m} \frac{\partial A}{\partial t} \frac{dt}{d\rho} = -\frac{I}{m} \frac{I}{v} \frac{\partial U_p}{\partial t} \frac{dt}{d\rho} = v/\rho + dv/d\rho$$

but in accordance with the hypothesis (28), $\partial U_p / \partial t = -(1/2)(dm/dt)v^2$ so that

$$-\frac{I}{m} \frac{1}{v} \left(-\frac{1}{2} \frac{dm}{dt} v^2 \frac{dt}{d\rho} \right) = v/\rho + dv/d\rho$$

by simplifying and multiplying both members by $d\rho/vdt$ there remains

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{I}{m} \frac{dm}{dt} &= (d\rho/dt)/\rho + (dv/dt)/v \quad \Rightarrow \\ (I/m)(dm/dt) &= 2(d\rho/dt)/\rho + 2(dv/dt)/v = \\ 2\frac{\dot{\rho}}{\rho} + 2\frac{\dot{v}}{v} \end{aligned}$$

which can immediately be integrated into

$$\ln m = \ln \rho^2 + \ln v^2 + \ln a^2$$

that is

$$m = a^2 v^2 \rho^2 \geq 0$$

which means that the mass cannot be negative.

The general equations in (19), in the particular case mentioned above, take the form

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= (1/m)(-\nabla U_p - \partial \mathbf{A} / \partial t) \\ \mathbf{B} &= (1/m) \nabla \times \mathbf{A} \end{aligned} \tag{22}$$

Later on we shall consider the *limit case* in which

$$m \approx m_o \quad v \approx v_o$$

and in which it is nonetheless

$$dm/dt \neq 0 \quad dv/dt \neq 0$$

In this way, as a special conclusion of this ND, a group of equations are deduced which are *isomorphic* with MAXWELL's electromagnetic equations. Also clearly shown is the *corpuscular-undulatory* nature of a particle of mass $m = m(t)$ when submitted to an non-conservative potential $U_p = U_p(P, t)$.

3. In the expression of \mathbf{E} found in (19) the divergence can be calculated, on the assumption that $U_p(P, t)$ is physically present around the particle whose mass depends on time: $m(t)$. In this case we can write

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = (1/m)(-\nabla^2 U_p - \nabla \cdot (\partial \mathbf{A} / \partial t)) \quad (23)$$

but

$$\partial \mathbf{A} / \partial t = (1/v)(\partial U_p / \partial t)\mathbf{s}$$

and when $\partial U_p / \partial t = -\partial U_c / \partial t = -(1/2)(dm/dt)v^2$ we get

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\partial \mathbf{A} / \partial t) &= (\partial / \partial s)[(1/v)(\partial U_p / \partial t)] = \\ &(\partial / \partial s)[-(1/2)(dm/dt)v] = \\ &-(1/2)(dm/dt)(dv/dt)/v \end{aligned} \quad (24)$$

since it is only $v = v(s)$.

On the other hand, from the expression found for the gradient of the potential energy in (20), we immediately get

$$\partial U_p / \partial s = -m(dv/dt) \quad (25)$$

which together with the preceding one for $\partial U_p / \partial t$ (19) and (27) gives us

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\partial \mathbf{A} / \partial t) &= -\frac{1}{2} \frac{dm}{dt} \frac{dv}{dt} \frac{1}{v} = -\frac{1}{2} \frac{dm}{dt} v^2 m \frac{dv}{dt} \frac{1}{v^3 m} = \\ &- \frac{\partial U_p}{\partial t} \frac{\partial U_p}{\partial s} \frac{1}{v^3 m} \end{aligned}$$

and we can then write the divergence of \mathbf{E} (23) as:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{m} \left(-\nabla^2 U_p + \frac{\partial U_p}{\partial t} \frac{\partial U_p}{\partial s} \frac{1}{v^3 m} \right)$$

and if we remember that we can easily find (in view of (25)):

$$\partial^2 U_p / \partial s \partial t = \partial^2 U_p / \partial t \partial s = -(dm/dt)(dv/dt)$$

starting from (24) we can also put

$$\nabla \cdot (\partial \mathbf{A} / \partial t) = (1/2v)(\partial^2 U_p / \partial s \partial t)$$

and finally it is:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = (1/m)[- \nabla^2 U_p - (1/2v)(\partial^2 U_p / \partial s \partial t)]$$

If we consider the surroundings of the physical point m , where there are no sources, whose meaning is $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, we obtain the "wave equation"

$$\nabla^2 U_p + \frac{I}{2v} \frac{\partial^2 U_p}{\partial s \partial t} = 0 \quad (26)$$

which is completely general and is satisfied here.

4. Also demonstrated is the "particle-wave" structure which has a material point in movement when its potential energy is not conservative. This *dualism* is seen in the possibility of the undulatory aspect, which extends to all the space external to the particle and is expressed by the term $\nabla^2 U_p$, being made to correspond with the *corpuscular* aspect, localized and expressed by

$$\frac{I}{2v} \frac{\partial^2 U_p}{\partial s \partial t} = -\frac{I}{2} v \frac{dm}{dt} \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2} v \dot{m} \dot{v}$$

so that the equation of waves of this "corpuscle-wave" takes the form

$$\nabla^2 U_p - \frac{1}{2} \frac{1}{v} \dot{m} \dot{v} = 0$$

thereby unifying these aspects of the question. Obviously an undulatory structure of this kind will not exist when $m = \text{constant}$ or when $v = \text{constant}$.

5. We shall now study a special case in which we want the lineal momentum of the particle to be conserved:

$$p = mv = \text{constant}$$

by deriving its module with regard to time it is

$$(dm/dt)v + m(dv/dt) = 0$$

and by using the expressions found earlier:

$$\partial U_p / \partial s = -m(dv/dt) = -m\dot{v}$$

$$\partial U_p / \partial t = -(1/2)(dm/dt)v^2 = -\frac{1}{2}\dot{m}v^2$$

we shall have

$$-(dm/dt)v - m(dv/dt) = -\frac{2}{v}\frac{1}{2}\dot{m}v^2 - m\dot{v} =$$

$$(2/v)\partial U_p / \partial t + \partial U_p / \partial s = 0$$

and if we derive it partially with regard to time we shall get

$$(2/v)(\partial^2 U_p / \partial t^2) = -\partial^2 U_p / \partial s \partial t$$

with this result the general wave equation (26) in this special case becomes

$$\nabla^2 U_p - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 U_p}{\partial t^2} = 0$$

(27)

which is isomorphic with D'ALEMBERT's wave equation, except that here the velocity is not constant; if it were, the undulatory aspect would disappear, but we can come closer, as an extreme result, so that: dv/dt and dm/dt are not null and yet we can consider: $v \approx \text{constant} = v_o$ and $m \approx \text{constant} = m_o$, which are perfectly compatible (for example, it is enough

to imagine very brief durations of these variations of speed and mass).

Also, and in the light of expression (23), it is possible to write

$$\begin{aligned} -m \nabla \cdot \mathbf{E} &= \nabla^2 U_p + \nabla \cdot (\partial \mathbf{A} / \partial t) = \\ \nabla^2 U_p + (\partial / \partial t) \nabla \cdot \mathbf{A} &= 0 \end{aligned}$$

and from the last wave equation (27) we get

$$(\partial / \partial t) \nabla \cdot \mathbf{A} = -(1/v^2) (\partial^2 U_p / \partial t^2)$$

and definitively:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -(1/v^2) (\partial U_p / \partial t) + \phi(P)$$

where $f(P)$ is arbitrary and independent of time; it is also isomorphic with "LORENTZ's condition" of electromagnetism, except that here the velocity is not constant.

B. DEDUCTION OF "MAXWELL'S EQUATIONS"

1. In the general expression for vector \mathbf{B} (22) we can calculate the divergence

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= \nabla \cdot \left(-\frac{1}{m} \frac{\partial A}{\partial t} \frac{dt}{d\rho} \mathbf{b} \right) = -\frac{1}{m} \frac{dt}{d\rho} \nabla \cdot (U_p / v) \mathbf{b} = \\ &= -\frac{1}{m} \frac{dt}{d\rho} \frac{1}{v} \frac{\partial U_p}{\partial b} = 0 \end{aligned}$$

since $\partial U_p / \partial b = 0$, as the movement of the particle is on the osculating plane to the trajectory and ∇U_p has no component according to the binormal \mathbf{b} (see (17)). Thus, it is always proved true that

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

so that \mathbf{B} must be the *rot.* of a vector.

2. We are now going to look at the limit case, cited previously, in which the following conditions are satisfied:

$$dm/dt \neq 0 \quad \text{but} \quad m \approx m_o = \text{constant}$$

$$dv/dt \neq 0 \quad \text{but} \quad v \approx v_o = \text{constant}$$

and consequently the kinetic energy of the particle will also be approximately constant¹¹. Continuing with our study, we shall start by complying with:

$$\mathbf{B} = (1/m) \nabla \times \mathbf{A}$$

which, as we saw earlier, requires that: $m = a^2 v^2 \rho^2 \approx m_o$. And, since the speed is nearly constant, the radius of curvature should also be so; in other words, the trajectory is practically circular, or a straight line as a limit case. Thus, starting from the first equation in (22), we can write

$$\nabla \times m_o \mathbf{E} \approx -(\partial/\partial t) \nabla \times \mathbf{A}$$

¹¹ There are other particular cases in which $U_c = \text{constant}$ and yet the preceding requisites are also satisfied.

since it is permissible to permute the derivation order (on the assumption that the conditions of SCHWARZ's theorem are satisfied). From this we get

$$\nabla \times \mathbf{E} \approx -\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{m_0} \nabla \times \mathbf{A} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \quad (28)$$

The equation for this limit case that we are considering and which is isomorphic with MAXWELL-FARADAY's equation.

3. Let us now suppose that "LORENTZ's condition" is satisfied:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -(1/v^2)(\partial U_p / \partial t)$$

in the same conditions as the preceding section. In addition to the general expression for \mathbf{E} (22) it is

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{E} / \partial t &= \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial t} (-\nabla U_p - \partial \mathbf{A} / \partial t) = \\ &\frac{1}{m} [-\nabla(\partial U_p / \partial t) - \partial^2 \mathbf{A} / \partial t^2] \end{aligned}$$

and in the hypothesis that "LORENTZ's condition" is satisfied, we can write

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{E} / \partial t &\approx \frac{1}{m} [\nabla(v_o^2 \nabla \cdot \mathbf{A}) - \partial^2 \mathbf{A} / \partial t^2] = \\ &= \frac{1}{m} [v_o^2 (\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} + \nabla^2 \mathbf{A}) - \partial^2 \mathbf{A} / \partial t^2] \end{aligned}$$

since in this case $\nabla v_o^2 = 0$. And starting from $\mathbf{B} = \frac{i}{m} \nabla \times \mathbf{A}$ then it is

$$\partial \mathbf{E} / \partial t \approx \frac{i}{m} v_o^2 [\nabla \times m \mathbf{B} + \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{i}{v_o^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}]$$

by grouping terms and when $m \approx m_o$ in our case we get

$$\nabla \times \mathbf{B} \approx \frac{i}{v_o^2} \partial \mathbf{E} / \partial t + \frac{i}{m_o} [-\nabla^2 \mathbf{A} + \frac{i}{v_o^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}]$$

but if we consider the definition given by the potential vector \mathbf{A} in (21) and the wave equation (29) we immediately get

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{i}{v_o^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0$$

and this together with the preceding one give

$$\nabla \times \mathbf{B} \approx \frac{i}{v_o^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (29)$$

isomorphic with MAXWELL-AMPERE's equation.

4. From equation (31) and with identical hypotheses we can write

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} \approx -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B}$$

but, since $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ it is then also

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} \approx 0$$

which if we remember (32) gives us

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{v_o^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{v_o^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

From the last expression (29) for $\nabla \times \mathbf{B}$ it can be deduced that

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} \approx \frac{1}{v_o^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{E}$$

and in the light of (28) we immediately get

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{B} - \nabla^2 \mathbf{B} \approx \frac{1}{v_o^2} \frac{\partial}{\partial t} (-\partial \mathbf{B} / \partial t)$$

and as $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ always, we finally have

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{v_o^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \approx 0$$

5. Still on the subject of the limit problem which we have been dealing with in the preceding sections, it is clear that when the kinetic energy U_c is approximately constant, it can be derived with regard to time and we shall have the relation

$$mv(dv/dt) + (1/2)(dm/dt)v^2 \approx 0$$

And we can expand the equations (10) for \mathbf{E} and \mathbf{B} to:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{1}{m} [ma - mv(dv/dt)(dt/d\rho)\mathbf{n} + \frac{1}{2}(dm/dt)v\mathbf{s}] \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{mv} (dt/d\rho) \frac{1}{2} (dm/dt)v^2 \mathbf{b}\end{aligned}$$

If we now set the condition that \mathbf{E} is normal to \mathbf{v} , the component, according to \mathbf{s} , in the previous equation, must be null:

$$mdv/dt + \frac{1}{2}(dm/dt)v = 0$$

whose meaning is precisely $U_c = \text{constant}$. And then, in this limit case, the equations will be

$$\mathbf{E} \approx [-v_o^2/\rho_o - v_o(dv/dt)(dt/d\rho)]\mathbf{n}$$

$$\mathbf{B} \approx (1/m_o) \nabla \times \mathbf{A} = (v_o/\rho_o + dv/d\rho) \mathbf{b}$$

If we wish for an analogy with the electromagnetic case of "plane wave",

this means that the radius of curvature must tend towards infinite or else must be very large in comparison with the other magnitudes, and thus it must be

$$v_o/\rho_o \approx 0$$

and then the vectors \mathbf{E} and \mathbf{B} will be

$$\mathbf{E} \approx -v_o(dv/d\rho)\mathbf{n} \quad \mathbf{B} \approx (dv/d\rho)\mathbf{b} = \omega^*$$

so that $E/B \approx -v_o$. Therfore, the force which acts on the particle in this limit case is

$$\mathbf{f} = m_o(\mathbf{E} + v_o \times \mathbf{B}) \approx 0$$

and in addition to this we shall have: $v_o \times \mathbf{B} = \mathbf{E}$, and since \mathbf{E} is transverse, this relation tells us that the direction of propagation \mathbf{v} , \mathbf{E} and \mathbf{B} form a direct trihedron. In this limit case the following is also proved:

$$\mathbf{B} = (l/v_o)\mathbf{s} \times \mathbf{E}$$

and from this can be seen, in this special case, the existence of a progressive *plane wave* with a velocity of propagation of $v = v_o$.

Evidently, as in electromagnetism, the relation is proved:

$$|E| / |B| = v_o$$

6. We shall end our comparison with electromagnetism here. Any field in which the potential energy $U_p = U_p(P, t)$ and cannot be reduced to trivial cases, to which we have already referred throughout this

study, has this structure. For example, this theory should be applied to those cases in which CD is insufficient, as in the famous problem of the "three bodies" ("Trojan" asteroïds, etc.).

CHAPTER III

EXPERIMENTAL TESTS

Inseparable to the creation of the theoretical framework which has been put forward here, a series of experimental tests have been carried out which confirm it and have also served to overcome many important stumbling-blocks which would otherwise have been very difficult and even impossible to deal with. The most significant of these tests are summarized in the following pages, without going into the details which pertain to the papers corresponding to the experimental investigation.

1. *Non-aerodynamic lift in flying insects.* This test was carried out for the first time in 1977 in the laboratory of the Pharmacy Faculty at the University of Navarre, Pamplona. Experiments were made using hymenoptera: *bombus terrestris* and with diptera: *calliphora vomitoria*, at a pressure of *13 mb* corresponding to the partial pressure of water vapour at *15° C*. The water vapour cannot be eliminated without using a vacuum pump of the type known as a "water trunk", otherwise the insect becomes greatly deformed and cannot fly. In this rarefied fluid (98.5% of normal atmospheric pressure: *1013 mb*) they fly perfectly for over *1–2 minutes*, even *hovering*, without any noticeable difference in their lift and manoeuvrability.

This study was registered in 1977. Since then it has been repeated several times by different people; always with the same results. At the end of this chapter our article in "Scientific American" appears in complete form, describing how this experimental test is performed.

2. *Rotative mechanical system which destroys angular momentum* which exists initially in relation to a fixed vertical axis with negligible friction, thereby violating the law of conservation of the same. Registered in 1984. This extremely simple mechanism is comprised of a disc, of mass *M*, which rotates around vertical axis, to which an elastic rod, also vertical, is fixed; at one end of this rod is fixed another mass *m*

$< M$ which oscillates with it and rotates with the disc. The system comes to a halt after a few rotations leaving only the oscillation of mass m on a vertical plane. The initial angular momentum in relation to the axis has disappeared. The initial kinetic energy has been transferred to the oscillation of m .

3. *Rotative mechanical system which creates or destroys angular momentum* starting out from initial rest, or modifying that which it had until a steady rotation is obtained with the initial angular momentum increasing or decreasing in relation to the vertical axis of rotation. This apparatus consists of a disc of mass M which can rotate in relation to its vertical axis with negligible friction; it contains an electric motor (whose mass is included in M) with an axis which is also vertical and parallel to the other one. This motor moves, eccentrically, a mass $m < M$ by means of a horizontal arm. The battery (4.5 V) is also fixed to the flywheel (and its mass is included in M). This experiment was carried out for the first time and registered in 1984.

4. *Rotative motor without a crankshaft nor connecting rods*, based on the transformation of energy from a piston into its corresponding cylinder, without having recourse to a connecting rod-crank mechanism or similar. Two different models have been built. Barcelona, 1989.

5. *Non-reactive lineal propellant*. It is based on the fact that $m = m(t)$ in this ND and on the "uncoupling" of forces by means of kinetic energy dissipation, by friction, between two of the masses of which the system consists (there must be at least three). A number of models were constructed, based on possibilities opened up by ND, but always with negative results. In May 1988 we discovered by experimentation that part of the kinetic energy in the system must be *dissipated* in order to undo the "coupling" of the forces anticipated by ND. In this way we managed to obtain a resultant in CM of the system which was not null; this possibility is corroborated by theory since these forces depend on the velocity of each one of the masses of which it consists. Supposing that the non-reactive lineal propellant (NRLP) is made up of three masses m_1, m_2, m_3 , which

interact on the same straight trajectory by means of potential and kinetic energy; in addition to the forces of acceleration, anticipated by CD whose resultant is null, there should also appear, in this particular case, the forces anticipated by ND:

$$(1/2)\sum(dm_i/dt)v_i\mathbf{s} \quad (30)$$

when \mathbf{s} is a *versor* according to the common straight line of action. Owing to "coupling" this resultant is also null as no propulsion is observed at all; nonetheless, by dissipating kinetic energy through reciprocal friction between two of the masses, their respective velocities will vary but this will not necessarily affect the velocity of the third mass (or it will do so in a very different proportion); thus the resultant (30) will no longer be null: the forces of ND have been "uncoupled" and this NRLP is possible. This fundamental discovery enabled the difficulties to be overcome. Since then, increasingly efficient machines have been built; the latest are very recent (1993) and run on batteries (3 V) and small high-powered electric motors; they reach speeds of between 15 and 40 m/min . over the third mass of reciprocal dissipation which completes the system. It can be clearly observed –by means of a suitable device which isolates the total system– that there is no reaction; in other words, the *lineal momentum is created*. Flying insects' propulsion and lift are derived from what is anticipated in this ND. In the next section we shall talk about the state of investigation into insect flight, reported in an article of ours whose final conclusions will be included here.

6. *Conclusions and physical applications of ND:*

a) The logical process of explanation leads us to conclusions and to ways in which the principles and theoretical laws which have been established can be applied. Nevertheless, creativity, research and synthesis sometimes follow a different path. This is what has happened in this study, so that this chapter corresponds, at least in part, to a series of experimental facts which led to the theoretical analysis of the principles and laws which govern them.

The *laws of conservation* in CD account for the majority of common processes, at least with sufficient approximation (for example: the

movement of planets and their satellites) and other factors such as friction, viscosity, turbulence, etc., disguise the problem when the effects deduced from the preceding theoretical speculations should be taken into account. In our opinion this is the reason why the *Three Fundamental Laws* of Dynamics which we have expounded here were not formulated much earlier.

Aristotelian and Thomist Metaphysics called for a greater consideration and appreciation of the qualitative aspects of the Cosmos –and in particular of Dynamics– which could only be supplied by asserting that the *essence* of things in themselves were accessible and objective. "Transcendental metaphysics"—which I would rather call pseudo-metaphysics— takes us away from the World and, as a result, only helps us to penetrate more deeply into the knowledge derived from laws and qualities which we already know, yet –strictly speaking— "solutions can be lost" if we do not take into account some qualities of the thing in itself, which do not necessarily have to provide us with models of reality based on immanent apriorities.

b) In one of our first recorded studies, in which the New Dynamics put forth here was perceived, we came to the conclusion –in a completely heuristic way and not without error, since we knew nothing at that time of ND— that it was possible to cheat the laws of conservation of *angular momentum* and *lineal momentum* in a closed, unbound system. In ND, as we mentioned earlier, it is easy to construct systems which do not conserve angular momentum; so as not to conserve the lineal momentum, as has already been pointed out, there must be *dissipation* of kinetic energy by *radiation* in order to uncouple the forces acting on the system; otherwise its resultant is null and this "propulsion without reaction" is not possible.

This made us think that there might be living beings in Nature whose movement would be based on the *Three Fundamental Laws* of ND. The most obvious answer is, we believe, in the flight of the majority of insects, whose wingbeats reach very high frequencies, with an extremely low number of REYNOLDS, which excludes lift based on aerodynamics as we know it. In the next section we shall cite some examples and assertions on this matter, taken from the most recently published studies.

c) In the diminutive insect *Haplothrips verbasci*, it can be observed that its two pairs of "wings" are nothing more than beating bars, approximately elliptic, with extremely fine and very flexible cilia, which

cannot act as a surface for lift but must rather serve –in our opinion– to avoid air resistance by making the laminae more effective; the extremely rapid oscillation of the wing-bars would be less efficient if turbulence were produced. In the section on "discussion and suggestions" of one of these studies it is asserted: "Ignorance of the details about the mechanism of flight, at such a low number of REYNOLDS, points out the need for extensive observation, during flight, in order to determine the movement of the wing-bars and the cilia, and also the need for further study of these details with the electronic microscope, and also for measurements designed to determine the physical properties of the group of cilia..." Another study ends with the following words: "therefore, it must be concluded that there is little reliable information about the aerodynamic forces generated by wingbeating and that the problem must be studied further". And in the publication "Scientific American", an article about unusual lift in certain insects, asserts: "The most important aspect, (the lift of) those insects and other flying creatures which I have discussed, depends largely on aerodynamic effects which are not stationary, and hitherto unknown, which for them are useful and not a hindrance, as they would be for man-made aeroplanes".

Clearly there is still a great deal of ignorance about insect flight and lift. If what has been expounded here and the experimental tests which were carried out are not mistaken, the explanation is clear and simple in the framework of ND put forward here: they would fly even in the absence of atmosphere or, at least, a good part of their lift and manoeuvrability is derived from forces, which do not exist in CD, but are dealt with in ND; air acts fundamentally to make respiration possible.

Nota bene:

This study is, as pointed out in the Introduction, a second, revised edition of the 1976 publication. The most recent investigation on the subject of insect flight has progressed very little since 1975. We may point out here that in May 1977, after this article was published, tests were carried out on insects (Hymenoptera: *Bombus terrestris* and Diptera: *Calliphora vomitoria*) which were made to fly in a rarefied atmosphere (13 mb, equivalent to 98.7% of normal atmospheric pressure: 1013 mb). This experiment has been repeated several times since then. See our small article: *The flight of the bumblebee*, in "Investigación y Ciencia", February 1986, page 41.

An interesting article appears in the magazine "Nature", Vol.

344, 5 April 1990: *Unconventional aerodynamics* by ROLAND ENNOS, who gives a clear explanation of the problems of the most recent investigation. By way of illustration we have selected some extracts: "More evidence has appeared showing that insects fly by mechanisms quite unlike those used by aeroplanes and helicopters. ZANKER and GOTZ have measured the instantaneous forces produced by tethered *Drosophila melanogaster* flies and find that they cannot be explained by conventional aerodynamic theory. The forces are also evidence that these flies have unusual methods for producing lift... Studies over the past twenty years of the aerodynamics of insects in free flight have usually concluded that the forces resulting from a conventional lift mechanism would not be adequate to support or propel the insect, and this has been verified by the results of ZANKER and GOTZ..." and he finishes the article by saying: "Their results have two important implications. Firstly, it is clear that to solve the problem of how insects control their flight will be extremely difficult; even if we discover exactly how the large numbers of direct flight muscles control the fine details of wing movement, we will not be able to solve this problem until we have a better understanding of unsteady aerodynamics. Secondly, studies of the aerodynamics of aerofoils in unsteady motion are urgently needed. Such investigation might not only clarify how animals fly, but would help us to improve our own aerodynamic designs; insects and birds are, after all, far more manoeuvrable than helicopters and aeroplanes."

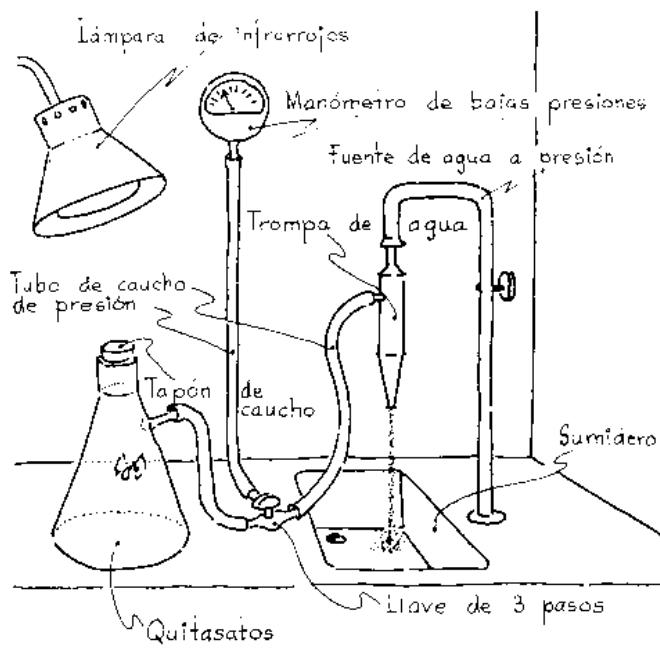
7. *The flight of the bumblebee.* An article published in "Investigación y Ciencia", February 1986. This study is transcribed in full here below, together with the corresponding illustration (see Fig. 3):

SIKORSKY, the famous aeronautic designer, ordered this notice to be hung up in the lobby of his technical office: "the bumblebee, according to our engineers' calculations, cannot fly at all, but the bumblebee does not know this and flies". There are quite a number of studies about insect flight and all of them come up against enormous difficulties when they try to explain the mechanisms of lift through the dynamics of stationary fluids. Let us take a look at some examples.

TORKEL WEISS-FOGH wrote eleven years ago (in 1975) in *Scientific American* that: "the most important aspect (lift) of these insects and other flying creatures depends largely on aerodynamic effects which are not stationary, and hitherto unknown, which for them are useful and not a hindrance as they would be for man-made aeroplanes". In another study, on the subject of *Haplothrips verbasci*, ARNOLD M. KUETHE said something similar: "Ignorance of the details about the mechanism of flight,

at such a low number of REYNOLDS, shows the need for extensive observations during flight in order to determine the movement of the wing-bars and of the cilia and, likewise, the need to penetrate more deeply in the study of these details using the electronic microscope, and also measurements designed to determine the properties of the group of cilia..." We could add a great deal more evidence. The reader will find the problem dealt with clearly in the article by JOEL G. KINGSOLVER published in these same pages about the engineering of butterflies (October 1985). Amongst other things he described the difficulties found in complex insect flight, many of them insuperable, having recourse once more to TORKEL WEIS-FOGH's hypotheses.

For some years I have been investigating, empirically and theoretically, a new approach to dynamics of which Classical Dynamics would be a restricted part. Amongst other things it opens up the possibility that propulsion and lift exist even in the absence of atmosphere. How can insect flight be explained, from the dynamic point of view? Evidently it is not reasonable in the framework of Newtonian dynamics in which the conservation of lineal momentum, in an isolated system, excludes this type of lift and propulsion.



Vuelo del insecto en el vacío. Montaje del experimento.

(Fig.3)

In the field of cosmology the insufficiencies of Newtonian mechanical theories in their fundamental axioms were detected many years

ago. Thus, the "first principle" asserts that an isolated material point (or system) follows a straight trajectory with a constant velocity; but the movement must be related to some inertial coordinated axes, external to the particle (or system) in question, which means that the isolation which is postulated is questionable, since it leads us to the contradiction that an isolated system has the property of not being isolated. This is the "weakest point of the magnificent edifice of Newtonian mechanics" (P. HOENEN, 1948). This First Principle must be rectified by asserting that there are no inertially isolated systems.

With this new starting point, together with the axiom of energy conservation, this new dynamics began to take form beginning with the simplest case in which the potential energy is conservative, to generalize it, in a second step, to the non-conservative case. It leads us to the surprising result that in addition to the Newtonian forces of inertia, which only consist of the accelerations of particles and their respective masses, there are in fact other forces of inertia –hitherto unknown– which also include the velocity of particles, whose mass may behave as non-constant in the non-conservative case. These forces are isomorphic with "LORENTZ's forces" of electromagnetism, whose origin is purely empirical.

In the conservative case, the particle is affected by only one other force in addition to the classical ones: we have called it the *force of drag*, which is superimposed on the Newtonian one and is normal to the trajectory; it has the quality of changing sign when the physical point reverses the sense in which it is moving on the trajectory. We have an example in HALLEY's comet, which could be asymmetric when it passes through the perihelion, that is to say, the ingoing arc might not be identical to the outgoing one.

Passing on to empirical observation, we can use the bumblebee, *Bombus terrestris*, as an experimental source. The equipment I used to observe the "abnormal" lift of the insect in a vacuum consisted of a vacuum pump, a glass container, a triple stopcock and a pressure gauge (see the adjoining illustration). The vacuum pump must be one of the kind known as "water trunk", used as a filter in chemistry laboratories. No other kind of pump must be used for a very simple reason: it is vital to maintain the partial pressure of the water vapour at room temperature, so that the insect does not swell up or become otherwise deformed, as would happen if we used a different type of pump, even if the vacuum obtained were greater. Moreover, it is so quick and effective that the insect remains active in the vacuum for a maximum of one or two minutes. At a room

temperature of *15 degrees CELSIUS*, a vacuum of *10 tor (13 mb)* is obtained, which compared with the normal value of atmospheric pressure (*1013 mb*) implies a vacuum of *98.7%*.

A transparent glass container of *1000 cubic centimetres* is used to hold the insect, closed hermetically with a rubber stopper and an outlet in the side to which the pressure tube, also rubber, is attached in order to cause the vacuum at the right moment. Larger containers should not be used in order for the emptying time to be minimal –about ten seconds– thereby allowing a maximum period of observation. The insect is introduced through the opening in the top which is then hermetically sealed.

Valves, or triple stopcocks, of this kind are very simple and cheap, made of glass; it is inserted into the pressure tube, to connect the vacuum pump to the glass container. This valve enables us to re-establish atmospheric pressure in the container, after having produced the vacuum, without it being necessary to disconnect the pump, and to maintain the vacuum indefinitely once it has been obtained. It also serves to check the level of vacuum which has been produced, by means of a pressure gauge. On the question of low pressure gauges, the mercury ones are very reliable and also digital precision pressure gauges.

It is well known that insects activate their flight capacity if they reach a suitable temperature. (It would be a good idea to place a "flexi" lamp near the container for illumination and also to provide sufficient heat for radiation.)

The observational results are surprising: for one or two minutes the insect continues flying, or takes off in flight, without any perceptible difference from flight at normal atmospheric pressure, even when hovering. The insect's legs are in the habitual position for flight, that is, gathered up and folded backwards.

The wingbeat frequency is a characteristic of each insect which varies between very narrow limits in each species: around *300 hertz* for the bumblebee and *150 hertz* for the fly. Lift has an approximately lineal variation with the fluid density, so that flight in these conditions if we wish to explain it in terms of aerodynamics– would mean that the insect is capable of lifting a weight which is more than a hundred times greater than its own in normal atmospheric pressure; which does not seem scientifically acceptable.

In the case of insect flight the problem is generally not conservative and in this New Dynamics –which we have presented generically at the beginning of this article– there appear forces, which were hitherto unknown and responsible for lift and propulsion (without air being needed) which allow the empirical fact which we are putting forward to be explained. This is because in this new dynamic approach the laws of conservation of lineal momentum and angular momentum do not generally apply.

Classical dynamics is still perfectly applicable to those cases in which the system behaves *as if it were* inertially isolated, because of symmetries, zero tangential acceleration, circular orbit, etc., or else the new forces are negligible with regard to those which result exclusively from the masses and accelerations of the particles.

Thermodynamic *irreversibility*, the "strange and troublesome second principle" (J. MERLEAU-PONTY) which is incompatible with classical dynamics (MISRA-POINCARE theorem), is clearly shown to be corollary to the new dynamic approach, as is the particle-wave dualism. MAXWELL's equations of electromagnetics are deduced as a particular limit case of this ND. It must be noted that D. W. SCIAMA in 1953, FELIX TISSERAND eighty years earlier and, more recently, BRANS and DICKE all attempted an inverse process: to construct a theory of gravitation which was isomorphic with MAXWELL's electromagnetism.

Barcelona, 26th June 1996

(Revised, 26th February 2009)

John RIUS-CAMPS

Doctor Architect,

Professor at the UNIVERSIDAD DE NAVARRA.
Member of the REAL SOCIEDAD ESPAÑOLA DE FISICA.

Home address:

Gran Via de Carlos III, 59, 2º, 4^a
08028, BARCELONA.

E-mail jsriuscamps@coac.net
E-mail john@irrevresiblesystems.com

Tel : 93 - 330 10 69

BARCELONA, 26th February 2009

JUAN RIUS-CAMPS

**DINÁMICA DE SISTEMAS
MECÁNICOS IRREVERSIBLES**

26 de Febrero de 2009

EDICIONES ORDIS

EDICIONES ORDIS

Gran Vía de Carlos III, 59. 2º, 4^a
08028 BARCELONA
26 de Febrero de 2009

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN p. 67

CAPÍTULO I SISTEMA DE PUNTOS MATERIALES p. 71

- A. FUNDAMENTOS**
- B. ESTUDIO DE LA EXPRESIÓN DE LA FUERZA EN LA NUEVA DINÁMICA (ND)**
- C. ENTROPÍA MECÁNICA: SEGUNDA LEY FUNDAMENTAL**
- D. SENTIDO CINEMÁTICO DE LA VELOCIDAD ANGULAR ω^***

CAPÍTULO II ECUACIONES DE ONDA Y “ECUACIONES DE MAXWELL” p. 95

- A. DETERMINACIÓN DE LA ECUACIÓN DE ONDA CUANDO $Up = Up(P, t)$**
- B. DEDUCCIÓN DE LAS “ECUACIONES DE MAXWELL”**

CAPÍTULO III NOTAS COMPLEMENTARIAS p. 111

- A. CONDICIÓN DE FUERZA CENTRAL (ND)**
- B. CONDICIÓN DE FUERZA CENTRAL
(Caso singular de espiral logarítmica)**
- C. FUERZA CENTRAL NEWTONIANA
(Caso singular de espiral logarítmica)**

D. POSIBILIDAD DE ESPIRAL LOGARÍTMICA NEWTONIANA

E. FUERZA CENTRAL (*expresada en coordenadas polares*)

CAPÍTULO IV PRUEBAS EXPERIMENTALES p. 119

INTRODUCCIÓN

1. El estudio que brevemente presentamos corresponde al más amplio y completo de una serie de trabajos sobre los fundamentos de la Dinámica que se iniciaron en 1974¹²; se publicó por primera vez y con el mismo título en 1985. Ahora se reedita, con las oportunas correcciones y

1 Estos trabajos se iniciaron en la década de los 70; los más significativos, y con registro oficial, son:

Algunas consideraciones acerca de las Ecuaciones Cardinales de la Dinámica y el Segundo Principio de la Termodinámica, Pamplona, 1974.

La Afiración del “Principio de MACH” y sus Consecuencias Dinámicas, Pamplona, Ed. en ETSA, Universidad de Navarra, 1975.

Los Fundamentos Cosmológicos de la Mecánica y las Leyes Fundamentales de la Dinámica, Pamplona, Ed. en Anuario Filosófico, Universidad de Navarra, 1976.

Sustentación no Aerodinámica de determinados Insectos, Barcelona, 1977.

Metafísica de la Dinámica y sus consecuencias Físicas, Barcelona, 1978.

Dinámica del Punto Material, Barcelona, 1981.

Dinámica de Sistemas Mecánicos Irreversibles, Barcelona, primera edición, 1985. En este estudio -que ahora se reedita corregido y ampliado- se recoge lo más esencial y válido de los precedentes desde el punto de vista exclusivamente físico.

El Vuelo del Abejorro, Barcelona, Ed. “Investigación y Ciencia”, Febrero de 1986, pág. 41. En este artículo se exponen las pruebas experimentales realizadas con himenópteros: *Bombus terrestris* (“abejorro”) y con dípteros: *Calliphora vomitoria*. Vuelan perfectamente en una atmósfera muy enrarecida (13 mb, equivalente al 98,7% de la presión atmosférica normal: 1013 mb, y a temperatura de 15° C) conservando solamente la presión parcial del vapor de agua, a la temperatura ambiente, para que no se deformen. El insecto mantiene su vuelo, incluso en situación de “hovering”, durante un máximo de 2 minutos; se puede repetir la prueba, muchas veces, después de recuperarse de la anoxia.

Formulación Mecánica de la Entropía de un Sistema, Barcelona, 1992. En este trabajo se estudia la entropía termodinámica partiendo de los conceptos de energía cinética y energía potencial en que se resuelve, en definitiva, la energía interna de un sistema cerrado.

ampliaciones, a la luz de la investigación teórica y experimental más reciente.

En el primer capítulo, y en el apartado dedicado a los *Fundamentos*, se hace un resumen de las ideas expuestas con mayor amplitud y detalle en investigaciones precedentes, en las que primero de modo intuitivo y luego de manera más sistemática¹³, se hace una crítica *metafísica* de los “principios newtonianos” de la Dinámica Clásica (DC). Esto nos condujo a la formulación de las *Leyes Fundamentales* sobre las que descansa una nueva Dinámica (ND) de la que aquélla es un caso particular y restringido. No se abordan problemas de altas velocidades, que corresponden a la Teoría Especial de la Relatividad (TER), ni los que son objeto de la Dinámica Cuántica.

Partiendo de *Tres Leyes Fundamentales* y de la expresión de la energía cinética: $U_c = (1/2)mv^2$, de un punto material (o sistema de puntos materiales), que se acepta de forma axiomática, se llega a la formulación de la *fuerza* en esta ND que resulta ser *isomórfica* con la “fuerza de LORENTZ” del electromagnetismo. La necesidad de utilizar un *marco inercial de referencia*, en reposo respecto al centro de masa (CM) del sistema que se estudia (*cerrado* energéticamente y libre de *vínculos* con el resto del Universo excepto la *inercia*), forma parte de la esencia de la *Tercera Ley Fundamental* de la ND.

2. Desde el punto de vista formal resulta notable y sorprendente poder deducir las “ecuaciones de MAXWELL” de la Electrodinámica como un caso particular y límite de la ND, en lugar de postularlas en base a leyes experimentales descubiertas precedentemente (FARADAY, AMPÈRE, etc.). Leyes análogas rigen el comportamiento de otros “campos de fuerza” (por ej.: el gravitacional) y demás interacciones dinámicas. Deja de existir la incompatibilidad de fondo entre la Dinámica y la Electrodinámica.

Asimismo queda de manifiesto la posibilidad de tender un puente entre la Dinámica y la Dinámica Cuántica: las “ondas de materia” de DE

¹³ *Los Fundamentos Cosmológicos de la Mecánica y las Leyes Fundamentales de la Dinámica*, Pamplona, Ed. en Anuario Filosófico, Universidad de Navarra, 1976, vol. IX, págs. 325 - 378. Este trabajo ha sido reeditado en 1993, corrigiendo algunas exposiciones oscuras, e incluso erróneas, gracias a descubrimientos posteriores tanto teóricos como experimentales; sin embargo, las conclusiones son esencialmente las mismas.

BROGLIE entran en el campo de la ND; “partícula” y “onda” son aspectos de una misma formulación.

La *irreversibilidad*, que constituye la esencia del Segundo Principio termodinámico, es consecuencia estadística de que las *trayectorias* de los puntos materiales son *irreversibles* en la ND, salvo casos singulares.

Como es natural y lógico esta ND nos remite a la DC en casos particulares y en aquellos en que, no siendo exacta, resulta suficientemente aproximada: pequeñas aceleraciones y velocidades, campos lentamente variables con el tiempo, etc.

Barcelona, Julio de 1993

CAPÍTULO I SISTEMA DE PUNTOS MATERIALES

A. FUNDAMENTOS

1. Hasta ahora se postulaba en el Primer Principio newtoniano la existencia de sistemas físicamente aislados; pero aunque es factible la consideración de aislamiento respecto a influencias externas, de hecho no es posible esa separación. Existe una propiedad de la materia –la *inercia*– que viene a truncar estas esperanzas, pues la inercia no es otra cosa que la respuesta del “resto del Universo” a la presencia de materia en el sistema en cuestión. La inercia es, por tanto, una propiedad en parte *internal* y en parte *externa* al sistema; las “fuerzas de inercia” que hasta ahora se designaban con el apelativo de “ficticias” o “pseudo fuerzas”, son fuerzas *reales* y *exteriores* que actúan sobre el sistema. En esta exposición se supone, claro está, que tenemos referido el sistema a un marco inercial en las condiciones más arriba indicadas (en primera aproximación en movimiento rectilíneo y uniforme respecto a los ejes de COPÉRNICO), de lo contrario no tiene sentido hablar de aceleraciones; ahí queda de manifiesto la esencia del “principio de MACH”. Si el marco o base de referencia no es inercial, entonces sí que pueden aparecer fuerzas “ficticias” o “aparentes” debido a que los ejes coordenados de referencia son cualesquiera. Los ejes correspondientes a un referencial de inercia son, pues, muy específicos; están determinados a menos de un vector velocidad constante, desde el punto de vista dinámico.

Hasta el presente, los intentos de determinar un *referencial absoluto han fracasado* si nos atenemos a los resultados de MICHELSON-MORLEY, TROUTON-NOBLE, etc.; sin embargo la homogeneidad e isotropía correspondientes al “red shift”, demuestran que nuestro sistema solar posee, a lo sumo, una velocidad de 300 km/s respecto al marco inercial determinado por las estrellas, las galaxias, tomadas en su conjunto. Esta velocidad sugiere la presencia de un *substrato cosmológico* –en reposo absoluto, pues no hay nada respecto a lo que referir su movimiento– donde colocar los “observadores fundamentales” y del que las estrellas y galaxias son como las balizas que nos indican su situación. Este substrato es metaempírico, esto es, se substraer a la experiencia directa, pero esto no es excluyente respecto a su existencia o no existencia, que viene exigida por consideraciones anteriores a la experimentación física, es decir, su necesidad es metafísica. Aunque MACH fuera visceralmente antimetafísico,

sico, su “Principio” no es otra cosa que la afirmación de la necesaria presencia física de tal substrato; dice así: “Las únicas aceleraciones que tienen sentido son las medidas respecto al marco determinado por las estrellas lejanas en su conjunto”. Pero, a tenor de lo afirmado antes a propósito del “red shift”, no sólo las aceleraciones sino que incluso las velocidades exigen un referencial privilegiado; en el primer caso basta que la velocidad del referencial sea constante, en el segundo es preciso llegar a un referencial absoluto que excluya toda indeterminación, aunque sólo sea un vector constante.

2. Se hace necesario corregir el Primer Principio newtoniano afirmando, en su lugar, que *no existen sistemas inercialmente aislados*, si exceptuamos el Cosmos considerado en su totalidad. El éxito de la DC basada en el “Primer Principio” de NEWTON se debe a que, en primera aproximación, buena parte de los sistemas dinámicos se comportan *como si* estuvieran aislados; pero se trata de una restricción muy fuerte que debiera haberse detectado y subsanado hace muchos años. Cuando se postula: “el CM de un sistema aislado se mueve con velocidad constante” se incurre en contradicción de índole no física sino metafísica, pues esta “velocidad constante” lo es respecto a un marco inercial (ejes de COPÉRNICO por lo menos) y este marco es distinto, *exterior*, al sistema que consideramos. Y al postular su “aislamiento” no podemos definir este vector constante, ni siquiera su dirección y sentido que nos los daría el marco inercial, pues no podemos referirnos a él si el sistema es “aislado”¹⁴. El enunciado del Primer Principio encierra, pues, una contradicción que podemos enunciar así: “un sistema aislado posee la propiedad de no estar aislado”.

Por otra parte una contradicción con fundamento metafísico debe tener consecuencias físicas; esto significa que una Dinámica, con este fundamento newtoniano, debe apartarse de la realidad física; y esto no sólo en los casos previstos por la TER para altas velocidades, sino también en aquéllos en los que hasta ahora se consideraba perfectamente válida¹⁵.

3. Si sustituímos el primer postulado de NEWTON por la afirmación: *no existen sistemas inercialmente aislados*, llegamos a la

¹⁴ PIETRO HOENEN, *Filosofia della Natura Inorganica* , Brescia, Ed. La Scuola, 1949, pág. 124 y ss.

¹⁵ Para un estudio detallado de este aspecto relativo a los fundamentos metafísicos de la ND, véase nuestro trabajo: *Los Fundamentos Cosmológicos de la Mecánica y las Leyes Fundamentales de la Dinámica*. Anuario Filosófico, Universidad de Navarra, volumen IX, 1976. Reeditado, corregido y con nuevas aportaciones en 1993.

esencia de la que hemos venido en llamar *Tercera Ley Fundamental* de la ND. La *Primera Ley Fundamental* de esta ND es sencillamente la conservación de la energía en un sistema *cerrado*. ¿Cuál es la *Segunda Ley Fundamental*? Hace referencia a la *irreversibilidad* de los procesos dinámicos que contempla la ND, salvo casos singulares; lo veremos con detalle en los siguientes apartados del presente capítulo.

Se precisa estructurar la ND con estos puntos de partida. Los Principios Segundo y Tercero de la DC sólo serán parcialmente válidos, pues nos conducen a las leyes de conservación del *momento lineal* y del *momento angular* en un sistema aislado y esto, como veremos, no es siempre posible en el nuevo marco dinámico que presentamos. Este trabajo lo emprendimos hace ya bastantes años, sobre todo a partir de 1974 en que salieron a la luz los primeros estudios oficialmente registrados, desde entonces la profundización y la investigación de la ND ha sido constante. En los estudios anteriores a 1981 habíamos mantenido constante la masa m de una partícula material sujeta a una energía potencial no conservativa, esto es, dependiente de la posición y del tiempo (e independientes ambas variables): $U_p = U_p(P, t)$; a partir de esta fecha se vio la necesidad de que en este caso general fuera: $m = m(t)$. Lo veremos con más detalle en lo que sigue.

B. ESTUDIO DE LA EXPRESIÓN DE LA FUERZA EN LA NUEVA DINÁMICA (ND)

1. A modo de introducción cabe decir que en esta ND no podemos partir ya de la “Ecuación Fundamental” newtoniana, que nos daba la expresión de la fuerza, pues sólo será válida en casos muy singulares, como consecuencia de la precedente crítica. Sin embargo, para construir la ND debemos sentar un punto de partida que nos permita elaborar la nueva teoría; la DC vendrá a ser un caso particular de ésta. Este punto de arranque, en el marco de las *Tres Leyes Fundamentales*, es la afirmación de que la energía cinética de un sistema de puntos materiales viene dada por la expresión:

$$U_c = (1/2)mv^2$$

siendo m la masa total del sistema y v la velocidad media cuadrática del mismo. Esta energía es la suma de las energías cinéticas de cada una de las partículas del sistema, que satisfacen expresiones análogas. No contemplamos aquí problemas relativistas en que intervienen elevadas velocidades. Como veremos más adelante, la masa del sistema en esta ND ya no es necesariamente una constante, sino que será, en general, función del tiempo. Normalmente, y mientras no se especifique de modo expreso, supondremos referido el sistema a un marco de coordenadas cartesiano e inercial.

En DC la energía potencial que posee un sistema se dice conservativa si sólo depende de la posición de las partículas, es decir, es independiente del tiempo. Esta energía no se puede escribir, en general, como suma de las energías potenciales de cada partícula –como sucede con la energía cinética total– : su expresión es global, al depender de la posición de todas las masas del sistema, sin posibilidad de asignar a cada una de ellas una energía potencial que dependa exclusivamente de su posición. Sin embargo, sí es posible dar a cada partícula una energía potencial que sea función de su posición y del tiempo; para ello bastará poner en función del tiempo las coordenadas y las velocidades de los demás cuerpos en la expresión de la energía total. En un sistema energética-mente cerrado, para cada partícula m_i –si designamos por $U_{pi}(P_i, t)$ su energía potencial y por $U_{ci}(P_i, t) = (1/2)m_i v_i^2$ su energía cinética– podemos escribir en virtud de la *Primera Ley Fundamental*:

$$U_{ci}(P_i) + U_{pi}(P_i, t) = C_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (1)$$

en que,

$$U_{pi}(P_i, t) = \sum_j U_{cj}[P_j(t)] + U_p^{(i)}[P_i, P_1(t), P_2(t), P_{i-1}(t), P_{i+1}(t), \dots, P_n(t)]$$

Y el sumatorio se extiende a todas las variables excepto la (i) . Para el sistema de n partículas m_i , y sumando en los dos miembros de (1), resultará:

$$\sum_{i=1}^n U_{ci}(P_i) + U_{pi}(P_i, t) = U_c + \sum_{i=1}^n U_{pi}(P_i, t) =$$

$$U_c + U_p = C$$

que expresa la conservación de la energía del sistema, como era de esperar. Notemos que en la expresión: $U_{ci}(P_i) = (1/2)m_i v_i^2$ es siempre $v_i = v(P_i)$, pues la velocidad implica, por su propia naturaleza, cambiar de lugar, y es por tanto función de la posición de la partícula, salvo casos triviales en que no se pueda establecer esta relación funcional. También será siempre posible poner la posición en función del tiempo, pero es preciso distinguir y recalcar que aquí el tiempo es un simple parámetro, mediante el que expresamos las variables posicionales, y no una variable independiente como lo es en la energía potencial no conservativa: $U_{pi}(P_i, t)$. Con esas reflexiones a la vista, podemos escribir la (1) en la forma:

$$U_{ci}(P_i) + U_{pi}(P_i, t) = C_i \Rightarrow (1/2)m_i v_i^2 + U_{pi}(P_i, t) = C_i \quad (2)$$

y resulta la paradoja de que $U_{pi}(P_i, t)$ la podemos escribir en función de la posición P_i e independiente del tiempo. La única solución será que, en general, la masa m_i no la podremos considerar constante en esta ND, sino que deberá ser:

$$m_i = m_i(t)$$

con lo que obviamente es $(1/2)m_i v_i^2 = U_{ci}(P_i, t)$. Está claro que esta conclusión es de la mayor importancia.

2. Estamos ya en condiciones de hallar la expresión de la fuerza que actúa sobre una partícula de masa m que describe una trayectoria referida a un marco inercial; para mayor sencillez y claridad expositiva comenzaremos por un caso idealizado en que la masa es constante y, en consecuencia, el potencial es conservativo. Puesto que se trata de un sistema cerrado, por la *Primera Ley Fundamental* se verifica:

$$(1/2)m_o v^2 + U_p(P) = C$$

en la que es $v = v(P)$ y $m = m_o = \text{constante}$. La partícula describe una determinada *trayectoria* y, conocida ésta, su energía cinética depende de

una *única variable* que nos determina su posición sobre la misma; por ejemplo: el arco recorrido a partir de un punto origen, el radio de curvatura en cada punto, etc., es decir, se trata de variables *intrínsecas*. Así pues, el estudio que hacemos de la *fuerza*, que actúa sobre la partícula al describir esta trayectoria, es *local*. Supondremos un arco diferencial situado en el *plano osculador* en el punto P ; de esta forma, y sin pérdida de generalidad, podemos considerar la trayectoria como localmente plana y utilizaremos como referencial el triángulo de FRENET, cuyos vectores unitarios o *versores* son: s , n , b , según la tangente, la normal y la binormal, respectivamente. Se eligen como sentidos positivos: el de la velocidad de la partícula para s , el dirigido hacia la convexidad de la trayectoria para n , y para b el dextrógiro tal que:

$$\mathbf{b} = \mathbf{s} \times \mathbf{n} \quad (3)$$

En estas condiciones definimos la fuerza, según una variable x de la que depende *toda* la energía cinética U_c de la partícula, así:

$$\mathbf{F}_x = (dU_c/dx)\mathbf{x} \quad (4)$$

siendo \mathbf{x} el correspondiente *versor*.

Si aplicamos esta definición a las variables intrínsecas: arco de trayectoria s y radio de curvatura ρ , tendremos respectivamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_s &= (dU_c/ds)\mathbf{s} = (m_o v dv/ds)\mathbf{s} = (m_o dv/dt)\mathbf{s} \\ \mathbf{f}_\rho &= (dU_c/d\rho)\mathbf{n} = (m_o v dv/d\rho)\mathbf{n} \end{aligned} \quad (5)$$

puesto que la variación del radio de curvatura es según n . Estas dos fuerzas dependen de cómo varía la energía cinética, y en este sentido no existen más, pues sólo podemos considerar dos variables intrínsecas en una trayectoria plana. Sin embargo, debemos tomar en consideración, además, la *fuerza centrípeta* de la DC, que no está incluida en \mathbf{f}_ρ , pues no depende de la variación de la energía cinética sino de su valor:

$$m_o \mathbf{a}_n = -m_o(v^2/\rho) \mathbf{n} = -(2U_c/\rho) \mathbf{n}$$

La *fuerza total* que actúa sobre m_0 será la resultante de estas tres:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_o &= \mathbf{f}_s + m_o \mathbf{a}_n + \mathbf{f}_\rho = m_o \mathbf{a} + \mathbf{f}_\rho = \\ &= m_o \mathbf{a} + (m_o v (dv/d\rho)) \mathbf{n} \end{aligned} \quad (6)$$

En que el *sentido positivo* de \mathbf{n} , se ha elegido hacia la *convexidad* de la trayectoria.

Podemos dar otra expresión para la fuerza \mathbf{f}_ρ (5) escribiendo:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_\rho &= (m_o v dv/d\rho) \mathbf{n} = (m_o dv/d\rho) \mathbf{b} \times v \mathbf{s} = \\ &= -\mathbf{v} \times (m_o dv/d\rho) \mathbf{b} \end{aligned}$$

puesto que, por la (3), es $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{s}$. Por tener $dv/d\rho$ las dimensiones de una velocidad angular, podemos definirla así:

$$\boldsymbol{\omega} = (dv/d\rho) \mathbf{b} \quad (7)$$

con lo que:

$$\mathbf{f}_\rho = -m_o \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}^*$$

y de la (6) resulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_o &= m_o \mathbf{a} - m_o \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}^* = \\ &= m_o (\mathbf{a} - \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}^*) \end{aligned} \quad (8)$$

que es *isomórfica* con la “Fuerza de LORENTZ” del electromagnetismo:

$$\mathbf{f}_{em} = q(\mathbf{E}_{em} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{em})$$

Sorprendente resultado; más todavía si tenemos en cuenta que la expresión de la “Fuerza de LORENTZ” es exclusivamente experimental. Además, en el triedro de FRENET el valor v de la velocidad es siempre *positivo* en el *sentido* en que se mueve la partícula. Sabemos que mientras el móvil describe la trayectoria el centro de curvatura describe la *evoluta*; en esta última el signo de $d\rho$ es asimismo *positivo*, pues su sentido se invierte cuando se invierte en la trayectoria. Sin embargo cambia el *sentido* del producto vectorial $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}^* = \mathbf{s} \times \mathbf{b} v \boldsymbol{\omega}^* = \mathbf{s} \times \mathbf{b} v dv/d\rho$ pues se invierte el signo de dv y el de $d\rho$ resulta *inalterado* (los versores \mathbf{b} y \mathbf{s} en el triedro de FRENET invierten ambos su sentido al invertir el recorrido; ver los dos casos posibles en Figs. 1, 2', y 1', 2, respectivamente, pp. 91, 92). En consecuencia, si un punto material describe una determinada trayectoria y se *invierte* el sentido de recorrido, ésta resulta ***irreversible*** en el marco de la ND, mientras es ***reversible*** en DC. Así la expresión (8), según sea el *signo* de dv/dt , será:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_o &= m_o \mathbf{a} \pm m_o \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}^* = \\ &= m_o (\mathbf{a} \pm \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}^*) \end{aligned} \tag{8}$$

El ***CAOS***, descubierto en muchos fenómenos físicos, es consecuencia de dicha ***irreversibilidad***.

3. Vamos a estudiar ahora el caso en que sea $m = m(t)$, es decir, aquél en que se verifica la (4):

$$U_c(P, t) + U_p(P, t) = (1/2)m v^2 + U_p(P, t) = C \tag{9}$$

Mantenemos la misma definición dada en (4) para la fuerza que actúa sobre m dependiente de $U_c(P, t)$. Simplemente tomaremos en consideración que la energía cinética dependerá de la posición y del tiempo, tal como

queda reflejado en (9). Determinaremos ahora las fuerzas actuantes sobre m siguiendo el precedente proceso. Tendremos:

$$\mathbf{f}_s = (dU_c/ds)\mathbf{s} = (mvdv/ds)\mathbf{s} + (1/2)(dm/ds)v^2\mathbf{s} =$$

$$= (mdv/dt)\mathbf{s} + (1/2)(dm/dt)vs$$

$$\mathbf{f}_\rho = (dU_c/d\rho)\mathbf{n} = (mvdv/d\rho)\mathbf{n} + (1/2)(dm/d\rho)v^2\mathbf{n}$$

y análogamente la fuerza total sobre m ahora será:

$$\begin{aligned}\mathbf{f} &= m\mathbf{a} + (1/2)(dm/dt)vs + \mathbf{f}_\rho = \\ &= m\mathbf{a} + (1/2)(dm/dt)vs + (mvdv/d\rho)\mathbf{n} + (1/2)(dm/d\rho)v^2\mathbf{n}\end{aligned}\tag{10}$$

y teniendo a la vista (8) podemos escribir:

$$\begin{aligned}\mathbf{f} &= m(\mathbf{a} + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}^*) + (1/2)(dm/dt)vs + (1/2)(dm/d\rho)v^2\mathbf{n} = \\ &= \mathbf{f}_o + (1/2)(dm/dt)vs + (1/2)(dm/d\rho)v^2\mathbf{n} = \\ &= \mathbf{f}_o + (1/2)(dm/dt)vs - (1/2)(dm/d\rho)v^2\mathbf{s} \times \mathbf{b} = \\ &= \mathbf{f}_o + (1/2)(dm/dt)vs - \mathbf{v} \times (1/2)(dm/d\rho)vb\end{aligned}$$

De modo análogo al precedente caso en que $m = m_0 = \text{constante}$, se puede poner:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= (1/m)[\mathbf{f}_o + (1/2)(dm/dt)vs] \\ \mathbf{B} &= -(1/m)(1/2)(dm/d\rho)vb\end{aligned}\tag{11}$$

y resulta:

$$\mathbf{f} = m(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

En que dm no cambia de signo al invertir el sentido de recorrido, pues es independiente de la posición: $m = m(t)$. Asimismo el término $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ tampoco cambia de sentido, pues $d\rho$ mantiene asimismo su signo. En consecuencia, en (11) solamente \mathbf{f}_o varía su sentido (como en el

precedente caso) y la trayectoria sigue siendo *irreversible*.

La (11) es totalmente paralela a la (8). A partir de ésta, y con algunas hipótesis complementarias, se deducen para esta ND ecuaciones *isomórficas* con las de MAXWELL, que rigen todo el electromagnetismo, y que se expondrán en el capítulo siguiente. En esta ND las fuerzas (11) ya no son *invariantes* respecto a las “transformaciones de GALILEO”, de forma análoga a lo que sucede con las fuerzas electromagnéticas.

En el siguiente apartado se expondrá otra forma, totalmente distinta, de estudiar la *irreversibilidad* de los sistemas mecánicos en general que, como ya se ha visto, está en la esencia de esta ND y que hemos venido en llamar *Segunda Ley Fundamental*. Se trata de establecer una *función de estado* del sistema mecánico, que denominaremos *entropía mecánica* del mismo, que nos permita estudiar las posibles situaciones de *equilibrio estable* alcanzables.

C. ENTROPIA MECÁNICA: SEGUNDA LEY FUNDAMENTAL.

1. Estudiaremos sistemas mecánicos *cerrados*, esto es, que cumplen la *Primera Ley Fundamental*; en ellos definiremos una *función de estado*, *entropía mecánica* del sistema, que designaremos por S , por analogía con la entropía que estudia la Termodinámica. Expresará una característica *cualitativa* del sistema, distinta de su situación energética que viene regulada, desde el punto de vista *cuantitativo*, por la *Primera Ley Fundamental*: la conservación de la energía. La *entropía mecánica* sería la formulación cuantitativa de las cualidades energéticas de un sistema cerrado. De existir esta función S , claramente expresada y definida, tendríamos un valioso instrumento que sin duda se podría llamar *Segunda Ley Fundamental* de la Mecánica. Esta *Ley*, junto con la *Primera*, nos define la *evolución* de los procesos mecánicos en “sistemas aislados” desde el punto de vista energético, que denominamos *cerrados*. Un sistema cerrado y libre de vínculos con el resto del Universo tampoco se puede denominar propiamente “aislado”; existe como ya se ha visto una cualidad, la *inercia* omnipresente, que vincula todos los sistemas del Cosmos: de manera que podemos afirmar: “no existen sistemas inercialmente aislados”. Esta proposición coincide en el fondo con el anteriormente citado

“Principio de MACH” (ya conocido de manera menos clara por NEWTON), que podemos formular: “las únicas aceleraciones que tienen sentido son las que se refieren al movimiento respecto a las estrellas lejanas”; de ahí la necesidad de emplear “marcos iniciales” para construir la Mecánica. Como ya se ha expuesto, tal afirmación está en la esencia de la *Tercera Ley Fundamental*.

La ND se cimienta en esas *Tres Leyes Fundamentales* y en la definición de fuerza que hemos dado en el capítulo anterior. El “Primer Principio” y el “Segundo Principio” newtonianos pierden su validez general y sólo se cumplirán en determinados casos singulares. ¿Qué ocurrirá con el “Tercer Principio”? ¿Seguirá siendo universalmente válido?. Dada la nueva expresión de la fuerza en esta ND, en que la masa de cada una de las partículas de un sistema es, en general, función del tiempo, no se conservará, obviamente, el *momento angular* del mismo aunque sea *aislado*¹⁶. Sin embargo, la otra vertiente del “Tercer Principio” que exige la conservación del *momento lineal* en un sistema libre de vínculos, también se satisface en esta ND: en este caso la resultante de todas las fuerzas que contempla esta ND es nula; el CM (centro de masas del sistema) se moverá con movimiento rectilíneo y uniforme. Decimos esto en base a las experiencias realizadas estos últimos años, sin más justificación: existe lo que hemos venido en designar como “acoplamiento” de las fuerzas que actúan sobre las masas del sistema, que es causa de la nulidad de la resultante. Sin embargo, es posible “desacoplar” estas fuerzas si entre las masas que componen el sistema se produce, como consecuencia de sus movimientos recíprocos, *disipación* de energía hacia el resto del Universo, y la única forma posible puesto que está *libre de vínculos*, es que esta dissipación sea por *radiación*; en este caso el sistema cesa de ser *cerrado* y pasa a ser *abierto*. Así, en un sistema libre de vínculos puede no conservarse el momento lineal en aquellos casos que lo exige la DC. Este extremo lo hemos comprobado experimentalmente y aduciremos algunos ejemplos en el último capítulo.

2. Puesto que S es una *función de estado* del sistema, deberá ser independiente del camino recorrido en la evolución del mismo de un estado de equilibrio a otro estado de equilibrio. Para llegar a su formulación partiremos de las habituales exigencias, adaptadas a nuestro caso, y de forma axiomática:

¹⁶ *sistema aislado* = energéticamente *cerrado* y libre de *vínculos*.

- que sea *definida positiva*.
- que sea *aditiva o extensiva*.
- que sea *continua y diferenciable*.

La energía cinética U_c del sistema cerrado que consideramos, es aditiva y viene dada por: $U_c = (1/2)mv^2$, siendo m la masa total y v la velocidad media cuadrática. La función más sencilla para S que cumpla las exigencias precedentes es:

$$S = \sum m_i v_i \geq 0$$

siendo v_i la velocidad de la partícula m_i tomada en valor absoluto. Si introducimos la *velocidad media* v^* del sistema entonces podemos escribir:

$$S = mv^* \geq 0 \quad (12)$$

y por la desigualdad de CAUCHY-SCHWARZ, es:

$$S \leq S_{max} = mv$$

En los posibles estados de *equilibrio estable* del sistema, deberá ser constante la energía cinética:

$$dU_c = 0 \quad (13)$$

Pues U_c , de acuerdo con (13), debe ser *constante* (o: *max.*, *min.*, *inflex. horiz.*), pero esta condición (13) no es suficiente en general. Incluso pueden existir sistemas cuya energía cinética es constante y sin embargo no están en equilibrio estable, son oscilantes; por ejemplo: cuatro masas

vinculadas por cuatro barras rígidas, en forma de rombo, y dispuestas en el mismo plano y simétricamente; serán iguales las opuestas¹⁷. El rombo es articulado, con lo que las masas pueden oscilar, sin chocar, y girar alrededor de un eje perpendicular al plano y que pasa por el centro de masa y de simetría. Es evidente que, dado un impulso inicial, conservarán constante su energía cinética, pero ésta no lo será para cada una de las masas. La DC resuelve el problema de su movimiento por la conservación del momento angular respecto al eje de giro, pero en la ND no existe esta exigencia. ¿Cuáles serán los posibles estados de equilibrio estable si es que existen?. Vemos claramente que la condición (13) sólo es *necesaria* pero *insuficiente* para situaciones de equilibrio estable. Puesto que la entropía, definida por la (12), será variable durante la evolución del sistema (aún si la energía cinética permanece constante), vamos a exigir una segunda condición para el equilibrio estable:

$$dS = 0 \quad (14)$$

Tengamos presente que ahora, en esta ND, en general será $m = m(t)$. De esta manera las dos exigencias para que el equilibrio sea estable son la (13) y la (14), que desarrolladas nos dan

$$\begin{aligned} mvdv + (1/2)dmv^2 &= 0 \\ mdv^* + dm v^* &= 0 \end{aligned}$$

y simplificando la primera,

$$\begin{aligned} mdv + (1/2)dmv &= 0 \\ mdv^* + dm v^* &= 0 \end{aligned}$$

ecuaciones homogéneas –considerando las variables independientes m , dm – cuya compatibilidad exige:

¹⁷ Este mecanismo, aquí sólo esquematizado, se puede construir de manera que las cuatro masas puedan deslizarse por sus respectivas guías y sin chocar. El mecanismo real es algo más complicado pero es perfectamente factible. Como es habitual, todos los elementos del sistema excepto las cuatro masas: $2m$, $2M$, se consideran de masa despreciable.

$$\begin{vmatrix} dv & \frac{1}{2}v \\ dv^* & v^* \end{vmatrix} = 0$$

es decir:

$$v^*dv = (1/2)v^*dv^*$$

que integrada nos da:

$$\ln v^2 = \ln v^* + \ln A^2 \quad (\text{cuando } A \text{ es constante})$$

esto es:

$$v^2 = A^2v^*$$

Esta última exige, en el caso general que contemplamos, que sean:

$$\begin{aligned} v &= \text{constante} \\ v^* &= \text{constante} \end{aligned}$$

y siendo ahora necesariamente constante m , también será $U_c = \text{constante}$ y el equilibrio será estable. En resumen, las condiciones (13) y (14) son *necesarias y suficientes* para la estabilidad del equilibrio en el caso general que consideramos. Si sólo se satisface la primera ($U_c = \text{constante, max, min, o inflexión horizontal}$)¹⁸ el equilibrio será *inestable*. Si se suceden equilibrios inestables idénticos: el sistema será *oscilante*; pero también puede suceder que *evolucione, irreversiblemente*, hacia el equilibrio estable pasando por un número finito, o infinito, de situaciones inestables, todas distintas pero que tienden a la estabilidad en un tiempo finito, o infinito; en este último caso la evolución del sistema será *asintótica*.

En esta ND sabemos, como hemos expuesto en otro estudio, que cuando las diferentes trayectorias de los puntos materiales m_i , que componen el sistema cerrado, no son circunferencias (pues es imposible

¹⁸ Puede darse el caso *singular* en que, siendo $U_c = \text{constante}$, sin embargo no lo sea S , pero en determinados puntos, y durante un dt , se verifique $dS = 0$ (max., min. u *inflex. horizontal*): tendremos equilibrio *inestable* en estos puntos singulares.

que sean rectilíneas y recorridas con velocidad constante salvo que se trate de un sólo punto material) entonces, y en general, se verifica:

$$m_i = m_i(t) \quad \text{y} \quad m = \sum m_i(t) = m(t)$$

y no existe equilibrio estable.

Sin embargo, pueden existir estados de equilibrio estable, con trayectorias no circulares para las $m_i(t)$, en que sea $m = \text{constante}$ y asimismo $v = \text{constante}$; por ejemplo: una peonza simétrica de masa m_1 , con un punto del eje de giro fijo sobre otra masa $m_2 \gg m_1$, y que precesiona *establemente* a causa de la atracción gravitacional recíproca que suponemos constante. Observemos que en este caso el sistema se mantiene idéntico a sí mismo.

En el ejemplo del sistema simétrico, anteriormente presentado, formado por cuatro masas iguales dos a dos y dispuestas en forma de rombo; la evolución previsible en esta ND tiene dos posibilidades: o bien será un sistema cuyas oscilaciones son idénticas y con períodos iguales, o bien evolucionará de forma que las trayectorias de las cuatro masas se aproximen, asintóticamente, a la forma circular (en caso límite: dos masas inmóviles en el eje de giro y las otras dos -las de mayor masa- sobre la misma órbita circular). Queda patente, pues, la *irreversibilidad* del proceso.

En el caso precedente de la peonza simétrica, si la precesión *no es estable*, es decir, si existe *nutación*, la ND prevé la posibilidad de que ésta desaparezca, prácticamente, pasado un cierto tiempo; de hecho esto es lo que sucede en la realidad. La DC no puede dar cuenta de este fenómeno sino es acudiendo a pérdida de energía de rotación por rozamiento en el punto de apoyo; en nuestra opinión esta explicación resulta poco convincente, pues por el mismo motivo que desaparece podría volver a aparecer, al seguir presente el rozamiento.

3. Es bien sabido que en el marco de los “Tres Principios Newtonianos” se resuelve el problema del movimiento de *dos cuerpos* que interaccionan, y sin embargo no se puede dar solución general al “sencillo problema de los tres cuerpos”. Sólo se han podido establecer soluciones aproximadas, por el método de las “perturbaciones”, cuando una de las partículas tiene masa superior a las otras dos (por ej: el Sol en el sistema

solar). En 1912, SUNDMAN, después de superar graves dificultades, logró resolver este problema utilizando dicho método; pero no existe una solución simultánea para todo el sistema y es imposible para el caso general de tres puntos materiales cuyas masas sean idénticas¹⁹.

Las trayectorias *circulares* son el límite al que tiende el sistema cerrado cuando evoluciona irreversiblemente hacia el equilibrio estable; sean éstas las de cada una de las m_i , o las de los centros de masa de varios conjuntos de ellas (caso de la peonza simétrica antes citado). Como ya se ha dicho, puede suceder que el equilibrio estable sea inalcanzable. Obviamente el sistema lo estudiamos referido a una base inercial en reposo respecto al centro de masa del mismo.

No deja de sorprender esta incapacidad de la DC para resolver el problema de sistemas formados por tres o más cuerpos en interacción. Y, sin embargo, la Termodinámica resuelve el de infinito número de partículas análogas (átomos y moléculas). La *irreversibilidad* que, en general, poseen los sistemas según la ND, está íntimamente relacionada con el “Segundo Principio” termodinámico, que muchos científicos consideran “molestísimo y extrañísimo”²⁰. En nuestra ND el problema es claro y sencillo: la irreversibilidad termodinámica es consecuencia estadística de la irreversibilidad de todas y cada una de las trayectorias que describen las partículas que componen el sistema.

Finalmente, al ser en general $m = m(t)$, resulta que la energía cinética de una partícula material es función de la posición y del tiempo; de esta forma resulta muy sencillo pensar e imaginar una “partícula onda” y establecer un puente de unión entre la ND y muchos de los problemas que estudia la Mecánica Cuántica.

El isomorfismo entre la ND y el electromagnetismo, que hemos presentado, resuelve asimismo las incompatibilidades de fondo que existen entre la DC y la electrodinámica.

¹⁹ BRUNO FINZI, *Meccanica Razionale*, vol. II, p. 89.

²⁰ J. MERLEAU PONTY, *Cosmología del siglo XX*, Madrid, Ed. Gredos, p. 84.

D. SENTIDO CINEMÁTICO DE LA VELOCIDAD ANGULAR ω^*

1. Partimos de la trayectoria real de un punto material m , y para su estudio local utilizamos un referencial de inercia de FENET s , b , n , cuyos sentidos positivos vienen dados por el de la velocidad para s ; hacia la convexidad para n ; y por $b = s \times n$. Necesitamos considerar también la *evoluta* de la misma referida a los mismos ejes (ver Fig. 1, en el caso $dv/dt > 0$, y Fig. 2, en el caso $dv/dt < 0$, siendo $d\rho/dt < 0$ en ambos; las Fig. 1' y Fig. 2' corresponden al caso análogo en que $d\rho/dt > 0$. pp. 91-94).

Para explicar el sentido cinemático de la velocidad angular $\omega^* = dv/d\rho$, vamos a estudiar un elemento de trayectoria ds que se corresponde con el $d\rho$ de la *evoluta*; ambos están situados en el plano osculador (ver Fig. 1 cuando $dv/dt > 0$ y Fig. 2 cuando $dv/dt < 0$). Así pues, podemos considerar la trayectoria localmente plana y referida a una base inercial intrínseca de versores s , n , b , formada por la *tangente*, la *normal* y la *binormal*. El arco ds de trayectoria, está determinado por los puntos A , B , y el $d\rho$ de la *evoluta*, por sus homólogos A , B .

La velocidad de la partícula en A , es v , y en B , $v+dv$. Los radios de curvatura en estos puntos son: $\rho+d\rho$ y ρ . El ángulo girado por el radio de curvatura al pasar de A a B es:

$$d\theta = ds/\rho$$

y la correspondiente velocidad angular será:

$$\omega = d\theta/dt \quad (\text{con } \omega = \omega b)$$

También se puede escribir: $\omega = v/\rho$, que no depende, obviamente, de dv ni de $d\rho$. Al calcular la aceleración centrípeta llegamos a su expresión:

$$\mathbf{a}_\rho = (-v^2/\rho)\mathbf{n} \quad (15)$$

en la que no se consideran los incrementos dv , $d\rho$, pues no le afectan. Es el resultado de sustituir el ds de trayectoria por el correspondiente en círculo osculador en el punto. Sin embargo si observamos con detalle la *trayectoria real*, ésta viene caracterizada por tener una *evoluta* bien determinada (ver Fig. 1 y Fig. 2). Al prescindir de dv , en el estudio de la aceleración centrípeta, significa que partiendo del punto A llegamos al B' , pero no al punto real B ; y lo mismo cabe decir de sus homólogos centros de curvatura: el A está situado en la *evoluta*, por ser el punto de partida, pero el B' está situado fuera de la *evoluta* real (ver Fig. 1 y Fig. 2), cuyo punto es el B . Es evidente que la aceleración centrípeta está correctamente determinada, pero también resulta claro que el arco de *evoluta* $d\rho$ debe coincidir con el determinado por los puntos A , B de las figuras, y no por los A , B' , como sucede al prescindir de dv y de $d\rho$. Para corregir esta deficiencia será necesario girar AB' un ángulo:

$$d\theta^* = BB'/d\rho$$

para que coincida con $d\rho$ de la *evoluta real*, con una velocidad angular finita cuyo módulo viene dado por:

$$(BB'/d\rho)/dt = (d^2s/d\rho)/dt = dv/d\rho = d\theta^*/dt = \omega^*$$

Esta velocidad angular indica que la simplificación de sustituir, en cada punto, la trayectoria por el círculo osculador, lleva implícita la necesidad de girar el *arco de evoluta*, con velocidad angular ω^* , para que coincida con el *arco real*. Pero este *arco* AB' de *evoluta* debe ser *normal* al homólogo AB'' de la *trayectoria*, girado también $d\theta^*$ respecto al inicial AB (ver Fig. 1 y Fig. 2, pp. 91–92). Será preciso girar este arco AB' de *evoluta* un ángulo $d\theta^*$, en el *mismo sentido* cuando $dv/dt > 0$ y en sentido *opuesto* cuando $dv/dt < 0$, para que coincida con el *real* AB , y lo mismo en la *trayectoria*. Consecuencia de esto es que el radio de curvatura ρ se incrementa en el diferencial de segundo orden:

$$B'B'' = dsd\theta^* \quad (\text{con } dv/dt > 0)$$

$$B'B'' = -dsd\theta^* \quad (\text{con } dv/dt < 0)$$

del que resulta una *aceleración normal adicional*:

$$a_\rho^* = B'B''/dt^2 = dsd\theta^*/dt^2 = v\omega^* \quad (\text{con } dv/dt > 0)$$

$$a_\rho^* = B'B''/dt^2 = -dsd\theta^*/dt^2 = -v\omega^* \quad (\text{con } dv/dt < 0)$$

superpuesta a la *aceleración centrípeta* $a_\rho = -v^2/\rho = -v\omega$ (15). Así pues, la *aceleración normal total* será:

$$a_\rho + a_\rho^* = -v(\omega - \omega^*) \quad (\text{con } dv/dt > 0)$$

$$a_\rho + a_\rho^* = -v(\omega + \omega^*) \quad (\text{con } dv/dt < 0)$$

La *aceleración tangencial* $a_s = dv/dt$ evidentemente no cambia. En expresión vectorial podemos escribir:

$$a_s s + a_\rho n + a_\rho^* n = \mathbf{a} + v\omega^* \mathbf{n} = \mathbf{a} - \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}^* \quad (\text{con } dv/dt > 0)$$

(16)

$$a_s s + a_\rho n + a_\rho^* n = \mathbf{a} - v\omega^* \mathbf{n} = \mathbf{a} + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}^* \quad (\text{con } dv/dt < 0)$$

2. Ahora, desde el punto de vista dinámico, si deseamos calcular correctamente la *fuerza centrípeta total*, debemos considerar la *aceleración normal total* (16). La expresión de esta fuerza será:

$$\mathbf{f}_n = -mv(\omega - \omega^*) \mathbf{n} = m\mathbf{v} \times (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^*) \quad (\text{con } dv/dt > 0) \quad (17)$$

$$\mathbf{f}_n = -mv(\omega + \omega^*) \mathbf{n} = m\mathbf{v} \times (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}^*) \quad (\text{con } dv/dt < 0)$$

De la (16) y (17) se sigue que la *fuerza total* en la ND es:

$$\mathbf{f} = m_o(\mathbf{a} - \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}^*) \quad (\text{con } dv/dt > 0)$$

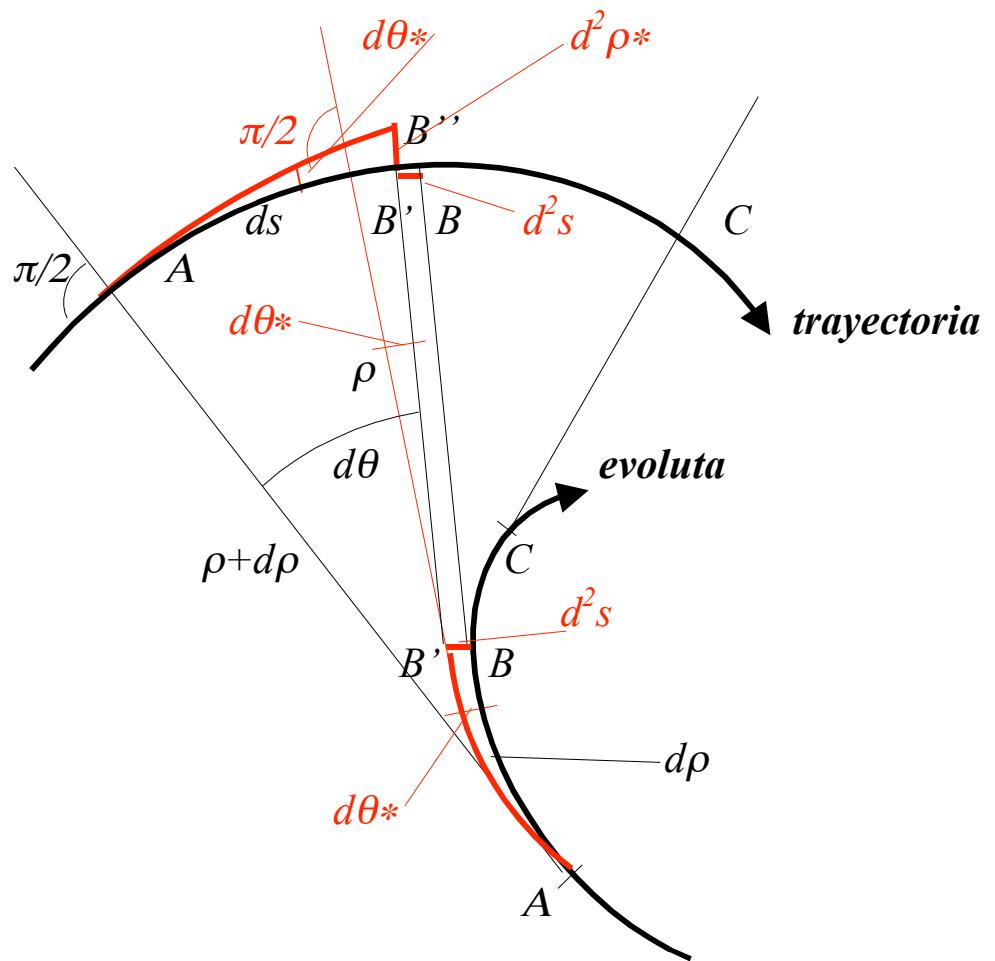
$$\mathbf{f} = m_o(\mathbf{a} + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}^*) \quad (\text{con } dv/dt < 0)$$

que son *isomórficas* con la “Fuerza de LORENTZ” del electromagnetismo:

$$\mathbf{f}_{em} = q(\mathbf{E}_{em} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{em})$$

Insistimos en que la *aceleración centrípeta*, como componente que es de la *aceleración total de la velocidad*, es perfectamente correcta: el vector aceleración expresa la variación con el tiempo del vector velocidad respecto al marco inercial, y no hay error ahí. La insuficiencia estriba, como acabamos de ver, en que las fuerzas debidas exclusivamente a aceleración *no son las únicas* que actúan sobre la masa m , como se postula en el “segundo Principio” newtoniano. Las ecuaciones (17) expresan la formulación dinámica de la presencia de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}^*$, que se traduce en la acción de otra fuerza, también normal a la trayectoria, adicional a la centrípeta de la DC. (véase lo expuesto en el apartado **B**: “Estudio de la expresión de la fuerza en la ND” (pp. 73 y ss.), en lo referente a la **irreversibilidad** de la trayectoria en el marco de la ND).

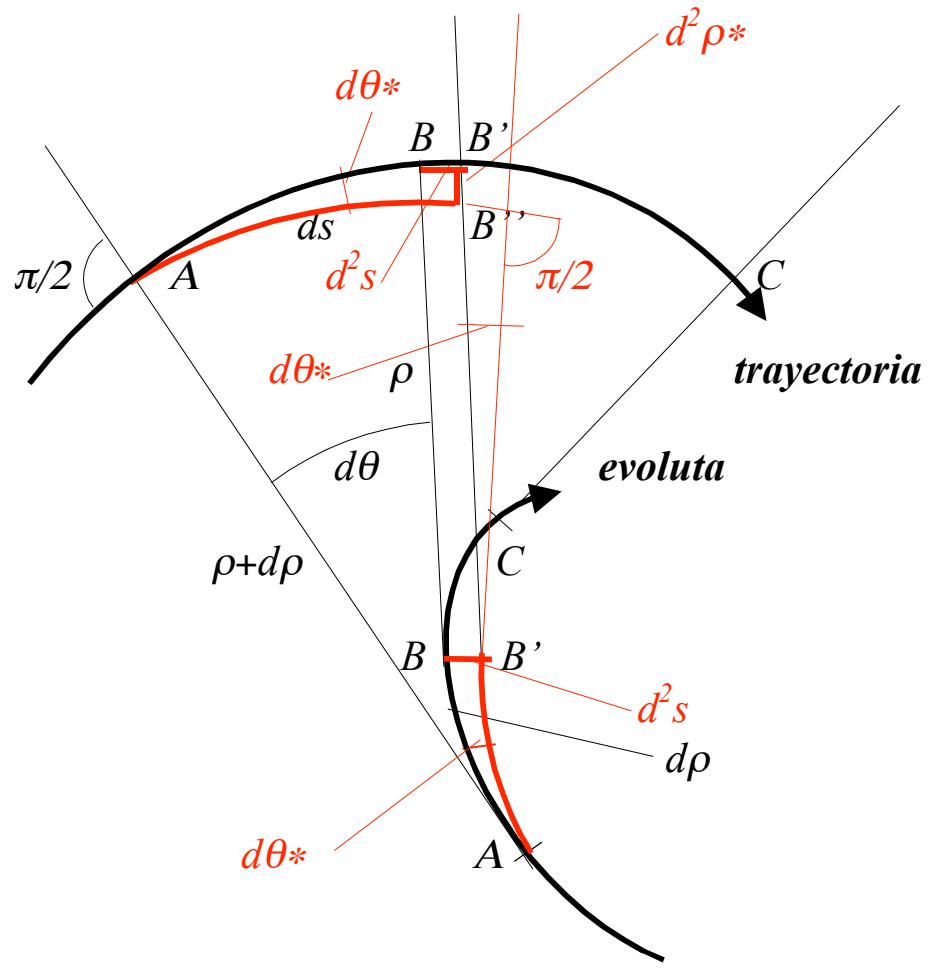
Solamente cuando la trayectoria sea una circunferencia, o la velocidad v sea constante, dejará de existir la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}^*$, (y la trayectoria será **reversible**) como puede observarse en las Fig. 1 y Fig.2 (y Fig.1' y Fig.2') que siguen:



Aceleración Normal Suplementaria (cuando $dv/dt < 0$)

$$a_n^* = d^2\rho^*/dt^2$$

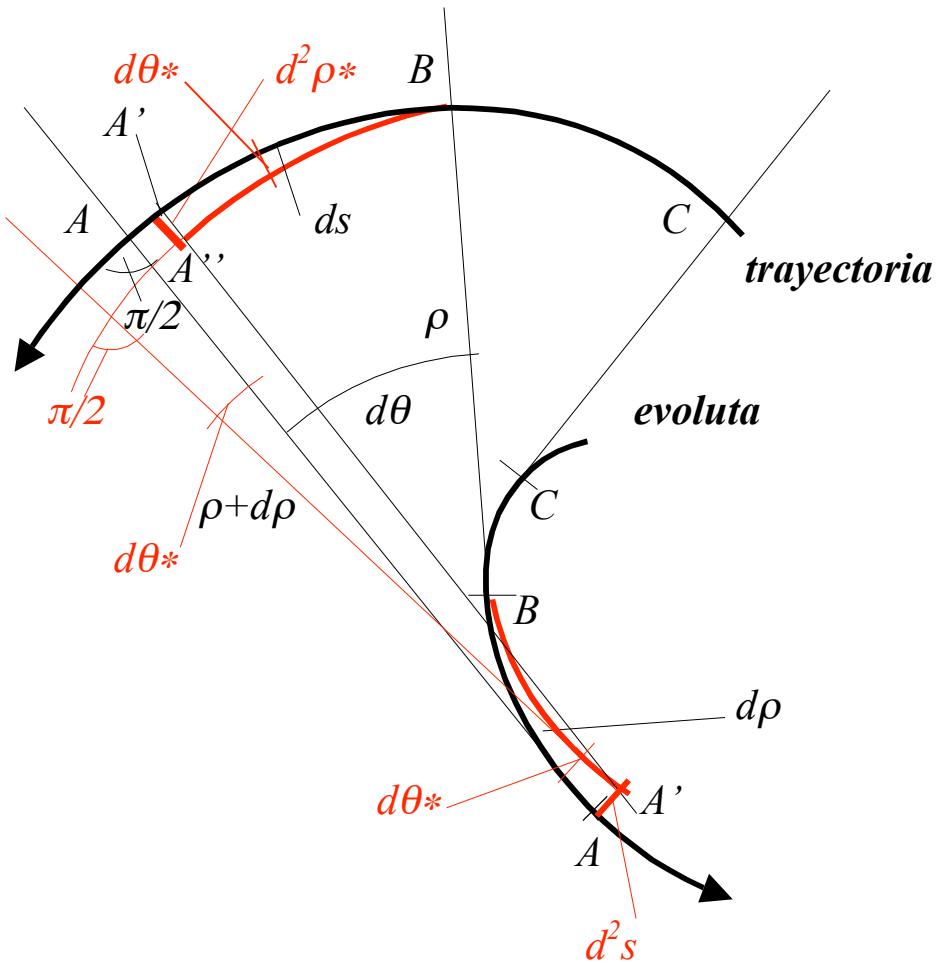
FIG. 1



Aceleración Normal Suplementaria (cuando $dv/dt > 0$)

$$a_n^* = d^2\rho^*/dt^2$$

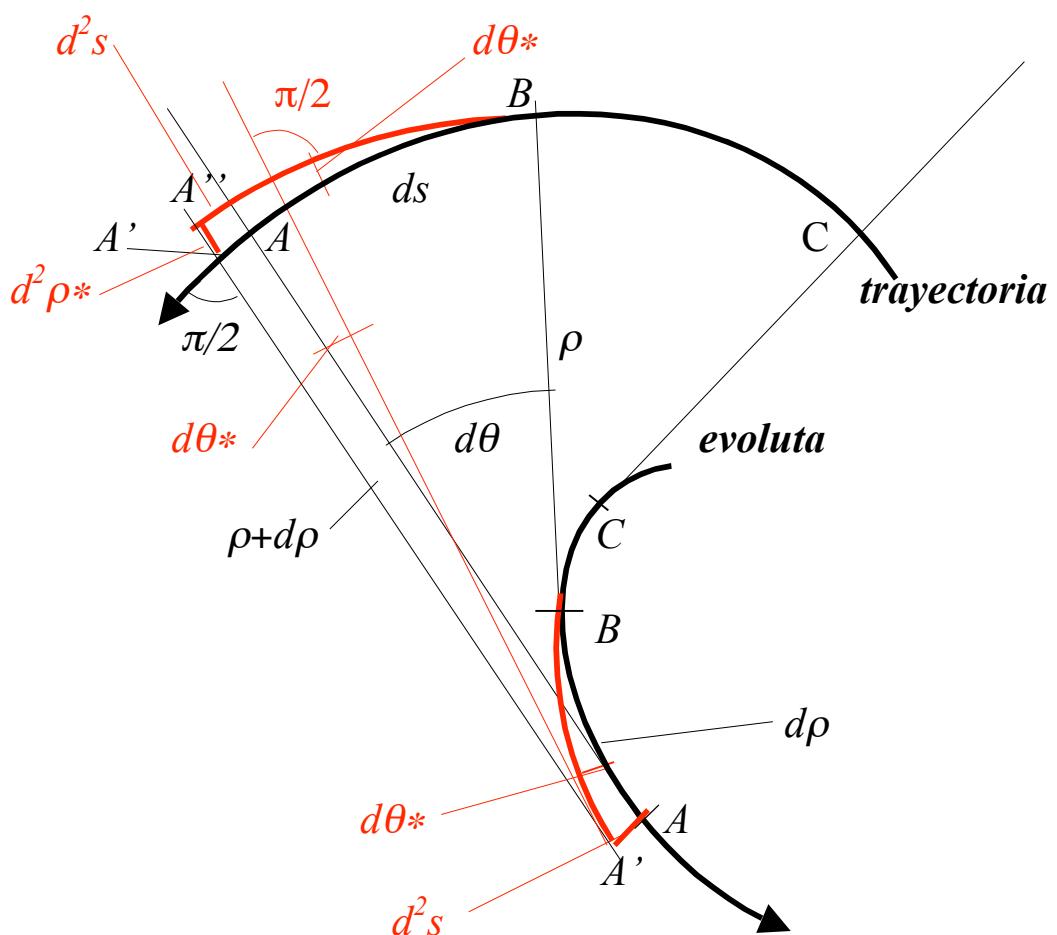
FIG. 2



Aceleración Normal Suplementaria
(en recorrido inverso, siendo ahora $dv/dt > 0$)

$$a_n^* = d^2\rho^*/dt^2$$

FIG. 1'



Aceleración Normal Suplementaria
 (en recorrido inverso, siendo ahora $dv/dt > 0$)

$$a_n^* = d^2\rho^*/dt^2$$

FIG. 2'

CAPÍTULO II ECUACIONES DE ONDA Y “ECUACIONES DE MAXWELL”

A. DETERMINACIÓN DE LA ECUACIÓN DE ONDA CUANDO $U = U(P, t)$

1. A partir de la expresión general de la fuerza en la ND (10), se puede llegar a conclusiones análogas a las que rigen el electromagnetismo. Pero para proseguir nuestra investigación en este sentido es preciso hacer algunas hipótesis adicionales a partir de la expresión (9) cuya derivada es:

$$dU_c(P, t) + dU_p(P, t) = d[(1/2)mv^2] + dU_p(P, t) = 0$$

que podemos poner en la forma:

$$[\nabla U_c \cdot \mathbf{v} + \partial U_c / \partial t] + [\nabla U_p \cdot \mathbf{v} + \partial U_p / \partial t] = 0 \quad (18)$$

Y hacemos ahora la hipótesis simplificadora de que se verifique:

$$\boxed{\nabla U_c \cdot \mathbf{v} = -\nabla U_p \cdot \mathbf{v}} \quad (19)$$

$$\boxed{\partial U_c / \partial t = -\partial U_p / \partial t}$$

Es claro que en general la correspondencia entre estos pares de valores, que satisfacen la (18), podrá ser más complicada, pero la última sirve perfectamente para nuestro propósito²¹. También, y en general, será:

²¹ En fenómenos “lentamente variables” será $|\partial U_c / \partial t| \ll |\partial U_p / \partial t|$ y $|\nabla U_c \cdot \mathbf{v}| \gg |\nabla U_p \cdot \mathbf{v}|$. Las (19) serán tanto más exactas cuanto más rápida sea la variación. Recordamos aquí el paralelismo con los fenómenos electromagnéticos.

$$\nabla U_c \neq -\nabla U_p$$

y si desarrollamos el operador gradiente aplicado a la energía cinética resulta de inmediato:

$$\nabla U_c = m\mathbf{a}$$

Por otro lado observamos que la fuerza \mathbf{f}_o es la componente de \mathbf{f} que no depende del tiempo y lo mismo le sucede a la fuerza que nos define $-\nabla U_p$ en el instante que la calculamos, y así podemos escribir la igualdad:

$$\begin{aligned} \nabla U_p &= -\mathbf{f}_o = -m(\mathbf{a} + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}^*) = \\ &= -m\dot{\mathbf{v}}\mathbf{s} + m(v^2/\rho)\mathbf{n} + (mv\dot{v}/\dot{\rho})\mathbf{n} = \\ &= -m(\mathbf{E}_o + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_o) \end{aligned} \quad (20)$$

Por otra parte habíamos hallado en (10) las expresiones para los vectores \mathbf{E} y \mathbf{B} dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= (1/m)[\mathbf{f}_o + (1/2)(dm/dt)v\mathbf{s}] \\ \mathbf{B} &= (1/m)(1/2)(dm/d\rho)v\mathbf{b} \end{aligned}$$

siendo $\partial U_c/\partial t = (1/2)(dm/dt)v^2$ y con el resultado (20), estas dos últimas se pueden escribir en la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= (1/m)[- \nabla U_p + (1/v)(\partial U_c/\partial t)\mathbf{s}] \\ \mathbf{B} &= (1/m)(1/v)(\partial U_c/\partial t)(dt/d\rho)\mathbf{b} \end{aligned}$$

y por la hipótesis (19) es equivalente a:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= (1/m)[- \nabla U_p - (1/v)(\partial U_p/\partial t)\mathbf{s}] \\ \mathbf{B} &= -(1/m)(1/v)(\partial U_p/\partial t)(dt/d\rho)\mathbf{b} \end{aligned}$$

Estas dos últimas ecuaciones nos sugieren la posibilidad de definir un “potencial vector” de la forma:

$$\mathbf{A} = (U_p(P, t)/v)\mathbf{s} + \Phi(P) \quad (21)$$

siendo $\Phi(P)$ un vector arbitrario, función de la posición solamente, y así resulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= (1/m)(-\nabla U_p - \partial \mathbf{A} / \partial t) \\ \mathbf{B} &= -(1/m)(\partial A / \partial t)(dt/d\rho)\mathbf{b} \end{aligned} \quad (22)$$

Ecuaciones análogas a las que se deducen en electromagnetismo a partir de la “fuerza de LORENTZ”. Podemos calcular el rotacional de este potencial vector en el triángulo de FRENET:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \mathbf{s} & \mathbf{b} & \mathbf{n} \\ \partial/\partial s & \partial/\partial b & \partial/\partial n \\ U_p/v & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{U_p}{v} \right) \mathbf{b} - \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{U_p}{v} \right) \mathbf{n} = \\ &= \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{U_p}{v} \right) \mathbf{b} = \frac{I}{v} \left(\frac{\partial U_p}{\partial n} \right) \mathbf{b} \end{aligned} \quad (23)$$

puesto que, por ser el movimiento localmente plano, U_p no puede variar según la binormal, y la velocidad v sólo varía (en módulo) según la tangente. Además, se ha elegido $\Phi(P) = \mathbf{0}$. Pero por los resultados (20), la componente según la normal del gradiente de U_p es:

$$\partial U_p / \partial n = mv(v/\rho + dv/d\rho)$$

con lo que a la vista de (23) tenemos en definitiva:

$$\nabla \times \mathbf{A} = m(v/\rho + dv/d\rho) \mathbf{b} = m(\omega^* + \omega) \quad (24)$$

2. Si queremos que se verifique exactamente:

$$\mathbf{B} = (1/m) \nabla \times \mathbf{A}$$

deberemos identificar ambos miembros de esta igualdad a partir de las expresiones (21), (22) y (24) y tendremos:

$$-\frac{I}{m} \frac{\partial A}{\partial t} \frac{dt}{d\rho} = -\frac{I}{m} \frac{I}{v} \frac{\partial U_p}{\partial t} \frac{dt}{d\rho} = v/\rho + dv/d\rho$$

pero por la hipótesis (19), $\partial U_p / \partial t = -(1/2)(dm/dt)v^2$ con lo que:

$$-\frac{I}{m} \frac{I}{v} \left(-\frac{1}{2} \frac{dm}{dt} v^2 \frac{dt}{d\rho} \right) = v/\rho + dv/d\rho$$

simplificando y multiplicando ambos miembros por $d\rho/vdt$ queda:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{I}{m} \frac{dm}{dt} &= (d\rho/dt)/\rho + (dv/dt)/v \Rightarrow \\ (1/m)(dm/dt) &= 2(d\rho/dt)/\rho + 2(dv/dt)/v = \\ &= 2\frac{\dot{\rho}}{\rho} + 2\frac{\dot{v}}{v} \end{aligned}$$

inmediatamente integrable en :

$$\ln m = \ln \rho^2 + \ln v^2 + \ln a^2$$

es decir:

$$m = a^2 v^2 \rho^2 \geq 0$$

cuyo sentido es que la masa no puede ser negativa.

Las ecuaciones generales (22), en el precedente caso particular toman la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= (1/m)(-\nabla U_p - \partial \mathbf{A} / \partial t) \\ \mathbf{B} &= (1/m) \nabla \times \mathbf{A} \end{aligned} \tag{25}$$

Más adelante consideraremos el *caso límite* en que se cumple:

$$m \approx m_o \quad v \approx v_o$$

y en el que sin embargo es:

$$dm/dt \neq 0 \quad dv/dt \neq 0$$

Por este camino se deducen, como conclusión particular de esta ND, un grupo de ecuaciones *isomórficas* con las electromagnéticas de MAXWELL. Quedará asimismo de manifiesto el carácter *corpuscular-ondulatorio* de una partícula de masa $m = m(t)$ por hallarse sometida a un potencial no conservativo $U_p = U_p(P, t)$.

3. En la expresión de \mathbf{E} hallada en (22) se puede calcular la divergencia, en el supuesto de que $U_p(P, t)$ tenga sentido físico en un entorno de la partícula cuya masa es función del tiempo: $m(t)$. Podremos escribir en este caso:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = (1/m)(-\nabla^2 U_p - \nabla \cdot (\partial \mathbf{A} / \partial t)) \tag{26}$$

pero:

$$\partial \mathbf{A} / \partial t = (1/v)(\partial U_p / \partial t) \mathbf{s}$$

y siendo $\partial U_p / \partial t = -\partial U_c / \partial t = -(1/2)(dm/dt)v^2$ resulta:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\partial \mathbf{A} / \partial t) &= (\partial / \partial s)[(1/v)(\partial U_p / \partial t)] = \\ &= (\partial / \partial s)[- (1/2)(dm/dt)v] = \\ &= -(1/2)(dm/dt)(dv/dt)/v\end{aligned}\tag{27}$$

puesto que solamente es $v = v(s)$.

Por otra parte, de la expresión hallada para el gradiente de la energía potencial en (20), es inmediato que

$$\partial U_p / \partial s = -m(dv/dt)\tag{28}$$

que junto con la precedente para $\partial U_p / \partial t$ (19) y la (27) nos da:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\partial \mathbf{A} / \partial t) &= -\frac{1}{2} \frac{dm}{dt} \frac{dv}{dt} \frac{1}{v} = -\frac{1}{2} \frac{dm}{dt} v^2 m \frac{dv}{dt} \frac{1}{v^3 m} = \\ &= -\frac{\partial U_p}{\partial t} \frac{\partial U_p}{\partial s} \frac{1}{v^3 m}\end{aligned}$$

y entonces podemos escribir la divergencia de \mathbf{E} (26) así:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{m} \left(-\nabla^2 U_p + \frac{\partial U_p}{\partial t} \frac{\partial U_p}{\partial s} \frac{1}{v^3 m} \right)$$

y si tenemos en cuenta que fácilmente podemos hallar (a la vista de (28)):

$$\partial^2 U_p / \partial s \partial t = \partial^2 U_p / \partial t \partial s = -(dm/dt)(dv/dt)$$

también podemos poner a partir de (27):

$$\nabla \cdot (\partial \mathbf{A} / \partial t) = (1/2v)(\partial^2 U_p / \partial s \partial t)$$

y finalmente es:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = (1/m)[- \nabla^2 U_p - (1/2v)(\partial^2 U_p / \partial s \partial t)]$$

Si consideramos el entorno del punto material m , donde no existen fuentes, cuyo significado es $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, obtenemos la “ecuación de onda”:

$$\nabla^2 U_p + \frac{1}{2v} \frac{\partial^2 U_p}{\partial s \partial t} = 0$$

(29)

que es completamente general y se satisface en dicho entorno.

4. Queda de manifiesto asimismo la estructura “partícula-onda” que posee un punto material en movimiento cuando su energía potencial no es conservativa. Este *dualismo* se manifiesta en la posibilidad de poner en correspondencia el aspecto *ondulatorio*, que se extiende a todo el espacio exterior a la partícula, y expresado por el término $\nabla^2 U_p$, con el aspecto *corpuscular*, localizado y expresado por:

$$\frac{1}{2v} \frac{\partial^2 U_p}{\partial s \partial t} = -\frac{1}{2} v \frac{dm}{dt} \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2} v \dot{m} \dot{v}$$

de modo que la ecuación de ondas de este “corpúsculo- onda” toma la forma:

$$\nabla^2 U_p - \frac{1}{2} \frac{\dot{m}}{v} \dot{v} = 0$$

quedando así unificados ambos aspectos de la cuestión. Es evidente que no existirá tal estructura ondulatoria cuando $m = \text{constante}$ o bien $v = \text{constante}$.

5. Estudiamos ahora el caso particular en el que exigimos la conservación del momento lineal de la partícula:

$$p = mv = \text{constante}$$

derivando su módulo respecto al tiempo resulta:

$$(dm/dt)v + m(dv/dt) = 0$$

y utilizando las expresiones precedentemente halladas:

$$\begin{aligned}\partial U_p / \partial s &= -m(dv/dt) = -m\dot{v} \\ \partial U_p / \partial t &= -(1/2)(dm/dt)v^2 = -\frac{1}{2}\dot{m}v^2\end{aligned}$$

tendremos:

$$\begin{aligned}-(dm/dt)v - m(dv/dt) &\equiv -\frac{2}{v} \frac{1}{2} \dot{m}v^2 - m\dot{v} = \\ &= (2/v)\partial U_p / \partial t + \partial U_p / \partial s = 0\end{aligned}$$

y si derivamos parcialmente ésta respecto al tiempo resultará:

$$(2/v)(\partial^2 U_p / \partial t^2) = -\partial^2 U_p / \partial s \partial t$$

con este resultado, la ecuación general de onda (29) pasa a ser en este caso particular:

$$\nabla^2 U_p - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 U_p}{\partial t^2} = 0 \quad (30)$$

que es isomórfica con la ecuación de onda de D'ALEMBERT, sólo que aquí la velocidad no es constante; si lo fuera desaparecería el aspecto ondulatorio de la materia, pero podemos acercarnos, como resultado límite, de modo que: dv/dt y dm/dt no sean nulos y sin embargo podamos considerar: $v \approx \text{constante} = v_o$ y $m \approx \text{constante} = m_o$, que son perfectamente compatibles (basta imaginar, por ejemplo, duraciones muy breves de estas variaciones de velocidad y de masa). Además, y a la vista de la expresión (26), es posible escribir:

$$\begin{aligned} -m \nabla \cdot \mathbf{E} &= \nabla^2 U_p + \nabla \cdot (\partial \mathbf{A} / \partial t) = \\ &= \nabla^2 U_p + (\partial / \partial t) \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \end{aligned}$$

y de la última ecuación de onda (30) resultará:

$$(\partial / \partial t) \nabla \cdot \mathbf{A} = -(1/v^2) (\partial^2 U_p / \partial t^2)$$

y en definitiva:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -(1/v^2) (\partial U_p / \partial t) + \phi(P)$$

siendo $\phi(P)$ arbitraria e independiente del tiempo; también es isomórfica con la “condición de LORENTZ” del electromagnetismo, con la salvedad de que aquí la velocidad no es constante.

B. DEDUCCIÓN DE LAS “ECUACIONES DE MAXWELL”

1. En la expresión general para el vector \mathbf{B} (22) podemos calcular la divergencia:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B} &= \nabla \cdot \left(-\frac{1}{m} \frac{\partial A}{\partial t} \frac{dt}{d\rho} \mathbf{b} \right) = -\frac{1}{m} \frac{dt}{d\rho} \nabla \cdot (U_p/v) \mathbf{b} = \\ &= -\frac{1}{m} \frac{dt}{d\rho} \frac{1}{v} \frac{\partial U_p}{\partial b} = 0\end{aligned}$$

por ser $\partial U_p / \partial b = 0$, puesto que el movimiento de la partícula es en el plano osculador a la trayectoria y ∇U_p no tiene componente según la binormal \mathbf{b} [ver (20)]. Así pues, siempre se verifica:

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0}$$

con lo que \mathbf{B} será necesariamente el *rotacional* de un vector.

2. Vamos a considerar ahora el *caso límite*, que ya se ha citado anteriormente, en el que se satisfacen las condiciones:

$$\begin{aligned}dm/dt \neq 0 &\quad \text{pero} \quad m \approx m_o = \text{constante} \\ dv/dt \neq 0 &\quad \text{pero} \quad v \approx v_o = \text{constante}\end{aligned}$$

y, en consecuencia, también será aproximadamente constante la energía cinética de la partícula²². Para proseguir nuestro estudio partimos de que se cumple:

$$\mathbf{B} = (1/m) \nabla \times \mathbf{A}$$

²² También caben casos singulares en los que sea $U_C = \text{constante}$ y sin embargo se cumplan también los precedentes requisitos.

que, como ya se vio, exige: $m = a^2v^2\rho^2 \approx m_o$. Y, por ser la velocidad quasi-constante, implica que lo sea asimismo el radio de curvatura; es decir, se tratará de una trayectoria quasi-circular, o una recta como caso límite. Así, a partir de la primera ecuación de (22), podemos escribir:

$$\nabla \times m_o \mathbf{E} \approx -(\partial/\partial t) \nabla \times \mathbf{A}$$

por ser lícito permutar el orden de derivación (en el supuesto de que se satisfagan las condiciones del teorema de SCHWARZ). De ahí se sigue:

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} \approx -\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{m_o} \nabla \times \mathbf{A} = -\partial \mathbf{B}/\partial t} \quad (31)$$

Ecuación para este caso límite que consideramos y que es isomórfica con la de MAXWELL-FARADAY.

3. Supongamos ahora que se satisface la “condición de LORENTZ”:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -(1/v^2)(\partial U_p / \partial t)$$

en las mismas condiciones del precedente apartado. Además de la expresión general para \mathbf{E} (25) es inmediato que:

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{E} / \partial t &= \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial t} (-\nabla U_p - \partial \mathbf{A} / \partial t) = \\ &= \frac{1}{m} [-\nabla (\partial U_p / \partial t) - \partial^2 \mathbf{A} / \partial t^2] \end{aligned}$$

y en la hipótesis de que se cumpla la “condición de LORENTZ”, podemos escribir:

$$\begin{aligned}\partial \mathbf{E} / \partial t &\approx \frac{1}{m} [\nabla(v_o^2 \nabla \cdot \mathbf{A}) - \partial^2 \mathbf{A} / \partial t^2] = \\ &= \frac{1}{m} [v_o^2 (\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} + \nabla^2 \mathbf{A}) - \partial^2 \mathbf{A} / \partial t^2]\end{aligned}$$

por ser en nuestro caso $\nabla v_o^2 = 0$.

Y a partir de $\mathbf{B} = \frac{1}{m} \nabla \times \mathbf{A}$ entonces es:

$$\partial \mathbf{E} / \partial t \approx \frac{1}{m} v_o^2 [\nabla \times m \mathbf{B} + \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{v_o^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}]$$

agrupando términos y siendo $m \approx m_o$ en nuestro caso resulta:

$$\nabla \times \mathbf{B} \approx \frac{1}{v_o^2} \partial \mathbf{E} / \partial t + \frac{1}{m_o} [-\nabla^2 \mathbf{A} + \frac{1}{v_o^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}]$$

pero si consideramos la definición dada para el potencial vector \mathbf{A} en (21) y la ecuación de onda (29) es inmediato que:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{v_o^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0$$

y de ésta y la anterior resulta:

$$\nabla \times \mathbf{B} \approx \frac{1}{v_o^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (32)$$

Isomórfica con la ecuación de MAXWELL-AMPÈRE.

4. A partir de la ecuación (31) y con idénticas hipótesis podemos escribir:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} \approx -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B}$$

pero, al ser $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ entonces también es:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} \approx 0$$

que teniendo presente la (32) nos da:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

De la última expresión (32) para $\nabla \times \mathbf{B}$ podemos deducir:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} \approx \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{E}$$

y a la vista de (31) es inmediato:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{B} - \nabla^2 \mathbf{B} \approx \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial}{\partial t} (-\partial \mathbf{B} / \partial t)$$

y por ser siempre $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, finalmente tenemos:

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{v_o^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \approx 0$$

5. Siguiendo en el problema límite de los precedentes apartados, es evidente que siendo la energía cinética U_c aproximadamente constante, podemos derivar ésta respecto al tiempo y tendremos la relación:

$$mv(dv/dt) + (1/2)(dm/dt)v^2 \approx 0$$

Y podemos escribir en forma desarrollada las ecuaciones (10) para \mathbf{E} y \mathbf{B} :

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{1}{m} [m\mathbf{a} - mv(dv/dt)(dt/d\rho)\mathbf{n} + \frac{1}{2}(dm/dt)v\mathbf{s}] \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{mv} (dt/d\rho) \frac{1}{2} (dm/dt)v^2 \mathbf{b}\end{aligned}$$

Si ahora imponemos la condición de que \mathbf{E} sea normal a \mathbf{v} , la componente según s , en la ecuación anterior, deberá ser nula:

$$mdv/dt + \frac{1}{2}(dm/dt)v = 0$$

cuyo significado es precisamente $U_c = \text{constante}$. Y entonces, en este caso límite, las ecuaciones serán:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &\approx [-v_o^2/\rho_o - v_o(dv/dt)(dt/d\rho)]\mathbf{n} \\ \mathbf{B} &\approx (1/m_o)\nabla \times \mathbf{A} = (v_o/\rho_o + dv/d\rho)\mathbf{b}\end{aligned}$$

Si deseamos una analogía con el caso electromagnético de “onda plana”, esto significa que el radio de curvatura deberá tender a infinito o ser muy grande en comparación con las demás magnitudes, y así deberá ser:

$$v_o/\rho_o \approx 0$$

y entonces los vectores \mathbf{E} y \mathbf{B} serán:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &\approx -v_o(dv/d\rho)\mathbf{n} \\ \mathbf{B} &\approx (dv/d\rho)\mathbf{b} = \omega^*\end{aligned}$$

con lo que: $E/B \approx -v_o$. La fuerza que actúa sobre la partícula en este caso límite es:

$$\mathbf{f} = m_o(\mathbf{E} + \mathbf{v}_o \times \mathbf{B}) \approx 0$$

y además de esta última resulta: $\mathbf{v}_o \times \mathbf{B} = \mathbf{E}$, y puesto que \mathbf{E} es transversal, esta relación nos indica que la dirección de propagación \mathbf{v} , juntamente con \mathbf{E} y \mathbf{B} , forma un triángulo directo. En esta situación límite es inmediato que también se verifica;

$$\mathbf{B} = (I/v_o)\mathbf{s} \times \mathbf{E}$$

de ahí que podamos afirmar, en ese caso particular, la existencia de una *onda plana* progresiva con velocidad de propagación $v = v_o$.

Es evidente que, al igual que en electromagnetismo, se verifica la relación:

$$|E| / |B| = v_o$$

6. Terminamos aquí nuestro estudio comparativo con el electromagnetismo. Cualquier campo en que la energía potencial sea $U_p = U_p(P, t)$, y no se pueda reducir a casos triviales, a los que ya hemos hecho referencia a lo largo del presente estudio, tiene esta estructura. Por ejemplo, se debería aplicar la presente teoría a aquellos casos en que la DC resulta insuficiente como sucede en el famoso problema de los “tres cuerpos” (asteroides “troyanos”, etc.).

CAPÍTULO III NOTAS COMPLEMENTARIAS

A. CONDICIÓN DE FUERZA CENTRAL (ND)

Para mayor sencillez consideramos la trayectoria plana y expresada en coordenadas polares (por tratarse de un estudio local siempre es posible tomar el referencial situado en el plano osculador a la trayectoria y en reposo respecto al triángulo de FRENÉT). Así, pues, tendremos (ver Fig. 2):

$$|\tan \alpha| = |d\rho/d\sigma| = \left| \frac{\dot{\rho}}{\dot{\sigma}} \right| \quad (\text{with } d\sigma = \rho d\theta)$$

y las componentes de la fuerza en el triángulo intrínseco son:

$$\begin{aligned} f_s &= mdv/dt + (1/2)(dm/dt)v = m\dot{v} + \frac{1}{2}\dot{m}v \\ -f_n &= mv^2/R + mv(dv/dR) + (1/2)(dm/dt)v^2(dt/dR) = \\ &= m\frac{v^2}{R} + mv\frac{\dot{v}}{R} + \frac{1}{2}\dot{m}v^2\frac{1}{R} \end{aligned}$$

y por ser la fuerza central por hipótesis (esto es, según el radio polar), también podemos poner:

$$\begin{aligned} |\tan \alpha| &= |f_s| / |f_n| = \\ &= |[mdv/dt + (1/2)(dm/dt)v] / [mv^2/R + mv(dv/dR) + (1/2)(dm/dt)v^2(dt/dR)]| = \\ &= |[mdv + (1/2)dmv] / [mvds/R + mdsdv/dR + (1/2)dmvds/dR]| = \\ &= |[dv/v + (1/2)dm/m] / [ds/R + (ds/dR)dv/v + (1/2)(dm/m)ds/dR]| = \\ &= [|dR/ds| |dv/v + (1/2)dm/m|] / [|dR/R + dv/v + (1/2)dm/m|] = \end{aligned}$$

$$\frac{\left| \frac{\dot{R}}{v} \|\dot{v}\| + \frac{1}{2} \frac{\dot{m}}{m} \right|}{\left| \frac{\dot{R}}{R} + \frac{\dot{v}}{v} + \frac{1}{2} \frac{\dot{m}}{m} \right|} = \left| \frac{\dot{\rho}}{\dot{\sigma}} \right| \quad (33)$$

Esta última nos da la condición que debe cumplir la fuerza, que actúa sobre la partícula m , para que sea central.

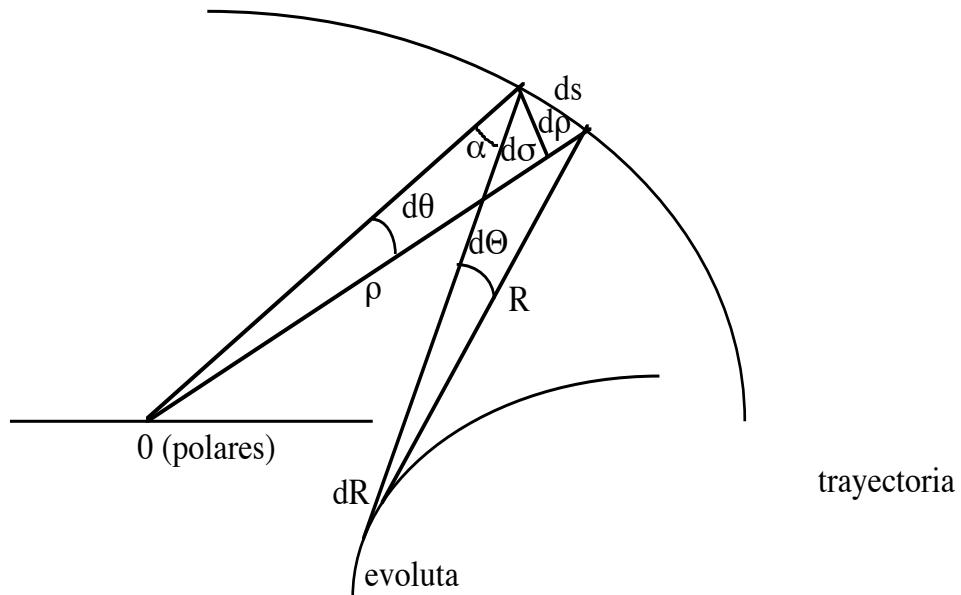


Fig. 2

B. CONDICIÓN DE FUERZA CENTRAL (*caso singular de espiral logarítmica*)

Dada la ecuación de la espiral logarítmica en coordenadas polares:

$$\rho = \rho_o B(\theta - \theta_o) \quad (34)$$

se cumplen las relaciones:

$$R = c\rho$$

$$\begin{aligned}\dot{R} &= c\dot{\rho} \\ \dot{s} &= c\dot{\sigma}\end{aligned}\tag{35}$$

siendo R el radio de curvatura, ds el arco de trayectoria y $d\sigma = \rho d\theta$. Estas propiedades se derivan de que la espiral logarítmica es siempre semejante a sí misma. Aplicando la condición de fuerza central (33) a este caso particular en que las magnitudes vienen dadas por las expresiones (35), tendremos:

$$\frac{\dot{v}}{v} + \frac{1}{2} \frac{\dot{m}}{m} = \pm \left(\frac{\dot{R}}{R} + \frac{\dot{v}}{v} + \frac{1}{2} \frac{\dot{m}}{m} \right)$$

a) signo (+): en este caso es $\dot{R}/R = 0 \Rightarrow R = \text{constante}$; la espiral logarítmica se reduce a una circunferencia.

b) signo (-): nos da la condición de fuerza central en las *espirales logarítmicas*, pues resulta:

$$\frac{\dot{R}}{R} + \frac{\dot{m}}{m} + 2 \frac{\dot{v}}{v} = 0$$

que integrada nos conduce a:

$$Rmv^2 = A^2 \quad \Rightarrow \quad mR^3\dot{\Theta}^2 = A^2 \tag{36}$$

Y, como veremos en lo que sigue, una espiral logarítmica de tipo newtoniano (fuerza inversa al cuadrado de la distancia al polo de atracción) es posible.

C. FUERZA CENTRAL NEWTONIANA (*caso singular de espiral logarítmica*)

Hemos de probar que esta posible solución cumple (36). En este caso la

ecuación integral de la energía es²³:

$$m\left(\frac{1}{2}\rho^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\dot{\rho}^2\right) = \frac{a^2}{\rho}$$

Derivando respecto al tiempo la ecuación de la espiral logarítmica (34), se tiene:

$$\dot{\rho} = B\rho\dot{\theta}$$

que sustituido en la anterior:

$$m\left(\frac{1}{2}\rho^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}B^2\rho^2\dot{\theta}^2\right) = \frac{a^2}{\rho}$$

de ésta:

$$m\rho^2\dot{\theta}^2(1+B^2) = 2\frac{a^2}{\rho}$$

y en definitiva:

$$m\rho^3\dot{\theta}^2 = 2a^2(1+B^2) > 0 \quad (37)$$

que es precisamente la condición (36) para que la fuerza sea central; bastará tomar²⁴:

$$2a^2/(1+B^2) = A^2/c^3 > 0$$

²³ Por ser la espiral logarítmica tangente en todos los puntos de la recta del infinito, la energía cinética deberá ser nula en el infinito (caso “parabólico”).

²⁴ Tener presente las relaciones (35) de las que se sigue de inmediato: $(dq/dt) = \pm(dQ/dt)$. También es preciso notar que en esta ND la energía potencial de la partícula: $m = m(t)$. será función de la posición y del tiempo, aún en este sencillo caso de fuerza central (dos cuerpos en interacción), salvo que la trayectoria fuera circular; así deberá ser: $U_p = -[a(t)]^2/r$. En otro estudio se justifica este aserto. De manera que esta trayectoria en forma de espiral logarítmica sólo será posible en aquellos casos en que se pueda suponer: $m \approx \text{constante}$ y asimismo, $a \approx \text{constante}$.

D. POSIBILIDAD DE TRAYECTORIA ESPIRAL NEWTONIANA

Como acabamos de justificar, en este caso singular deberemos suponer que la masa se mantiene constante con suficiente aproximación. Así la fuerza normal a la trayectoria, en el triedro de FRENET, será:

$$\begin{aligned} f_n &= -m_0 \left(\frac{v^2}{R} + v\dot{v} \frac{1}{R} \right) = \\ &= -m_0 \left((R^2 \dot{\Theta}^2 / R) + R\dot{\Theta}(\dot{R}\dot{\Theta} + R\ddot{\Theta}) \frac{1}{R} \right) \end{aligned} \quad (38)$$

Y puesto que la espiral logarítmica satisface las condiciones (35):

$$R = c\rho \quad \dot{\theta} = \pm \dot{\Theta}$$

sustituyendo estos valores en la anterior tenemos:

$$f_n = -m_0 c \left(2\rho\dot{\theta}^2 + \rho^2\dot{\theta}\ddot{\theta} \frac{1}{\dot{\rho}} \right) \quad (39)$$

y teniendo presente la condición de fuerza central newtoniana (37) :

$$m_o\rho^3\dot{\theta}^2 = 2a^2/(1 + B^2) > 0$$

derivando ésta respecto al tiempo nos da:

$$3\rho^2\dot{\rho}\dot{\theta}^2 + 2\rho^3\dot{\theta}\ddot{\theta} = 0$$

de donde es:

$$\rho^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} \frac{1}{\dot{\rho}} = -\frac{3}{2} \rho \dot{\theta}^2$$

valor que introducido en la expresión (39) nos da:

$$f_n = -\frac{1}{2} m_0 c \rho \dot{\theta}^2$$

Y a la vista de (38) y de esta última podemos escribir:

$$f_n = -\frac{1}{2} m_0 c \rho \dot{\theta}^2 = -m_0 \left(\frac{v^2}{R} + v \frac{\dot{v}}{R} \right) = -\frac{1}{2} m_0 \frac{v^2}{R} < 0$$

y finalmente de ésta:

$$-v \frac{\dot{v}}{R} = (1/2)v^2/R > 0$$

en la que, en el triángulo de FRENÉT, siempre son: $R > 0$, $\dot{R} > 0$, $v > 0$, con lo que necesariamente debe ser:

$$-\dot{v} = -dv/dt > 0$$

en el triángulo intrínseco, y cuyo significado es que ***la espiral logarítmica es posible*** con fuerzas de atracción newtonianas; pero solamente en este caso ($dv/dt < 0$) de salida hacia el infinito, con velocidad parabólica.

E. FUERZA CENTRAL (*expresada en coordenadas polares*)

Dos puntos materiales que interaccionan y están aislados conservan la energía –sistema aislado– y el CM se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme, o permanece en reposo, respecto a un marco inercial. En la ND ocurre lo mismo en este caso: conservación del *momento lineal*, aunque no se conservará, en general, el *momento angular*. Por ser inercial el movimiento del CM pondremos el origen del referencial ahí. Obviamente el movimiento es plano. Podemos aplicar a este problema de fuerza central la definición de fuerza de la ND dada en (4) puesto que toda la energía cinética depende de ρ . Así, en primer lugar, tendremos:

$$U_c(P, t) + U_p(P, t) = (1/2)mv^2 + U_p(P, t) = C$$

y la fuerza central en coordenadas polares será:

$$f_c = f_\rho = (dU_c/d\rho)\rho \quad (40)$$

Siendo ρ el *versor* según el radio polar. La energía cinética vendrá dada por:

$$U_c = (1/2)m\rho^2\dot{\theta}^2 + (1/2)m\dot{\rho}^2$$

y a partir de (40) podemos escribir:

$$f_c = f_\rho = m\left(\rho\dot{\theta}^2 + \rho^2\dot{\theta}\frac{\ddot{\theta}}{\dot{\rho}} + \ddot{\rho}\right) + \frac{1}{2}\dot{m}\rho^2\dot{\theta}^2\frac{1}{\dot{\rho}} + \frac{1}{2}\dot{m}\dot{\rho}$$

(41)

Expresión que lógicamente es distinta de la correspondiente a la DC, en la que sólo interviene la masa y la aceleración radial:

$$ma_\rho = m_0(-\rho\dot{\theta}^2 + \ddot{\rho})$$

Si imponemos a (41) la condición de que la aceleración sea central y la masa constante, como caso singular, se verificará:

$$\rho^2\dot{\theta} = constante$$

que derivada respecto al tiempo nos da:

$$2\rho \dot{\rho} \dot{\theta} + \rho^2 \ddot{\theta} = 0$$

y de ésta es inmediato:

$$\rho^2 \frac{\dot{\theta} \ddot{\theta}}{\dot{\rho}} = -2\rho \theta^2$$

y sustituyendo este valor en la ecuación (41), resulta finalmente:

$$f_\rho = m(-\rho \dot{\theta}^2 + \ddot{\rho}) = ma_\rho$$

como debe ser.

CAPÍTULO IV PRUEBAS EXPERIMENTALES

Inseparablemente a la creación del marco teórico que aquí presentamos, se han realizado una serie de pruebas experimentales que lo confirman y han servido además para superar muchos e importantes escollos que de otro modo hubiera resultado muy difícil e incluso imposible. Se resumen en lo que sigue las más significativas, sin descender a detalles que forman parte de las correspondientes memorias de investigación experimental.

1. Sustentación no aerodinámica de insectos voladores. Esta prueba se realizó por vez primera en 1977 en el laboratorio de la Facultad de Farmacia de la Universidad de Navarra, Pamplona. Se hicieron ensayos con himenópteros: *Bombus terrestris* y con dípteros: *Calliphora vomitoria*, a la presión de 13 mb correspondiente a la presión parcial de vapor de agua a 15° C. No se puede eliminar el vapor de agua utilizando una bomba de vacío distinta de una “trompa de agua”, pues entonces el insecto se deforma mucho y no puede volar. En este fluido enrarecido (98.5% de la presión atmosférica normal: 1013 mb) vuelan perfectamente durante más de un minuto, incluso en situación de “hovering”, sin apreciarse diferencias en su capacidad de sustentación y maniobra.

Este trabajo se registró en 1977. Después se ha repetido varias veces y por personas distintas; siempre con los mismos resultados. Al final de este capítulo se reproduce íntegro nuestro artículo en *Scientific American* (1986), en el que se describe la forma de realizar esta prueba experimental.

2. Sistema mecánico rotativo que destruye el momento angular que posee inicialmente respecto a un eje vertical fijo y con rozamiento despreciable, violando, por tanto, la ley de conservación del mismo. Registrado en 1984. Este sencillísimo mecanismo se compone de un disco, de masa M , giratorio según un eje vertical, en el que se ancla una varilla elástica, asimismo vertical, en cuyo extremo se fija otra masa $m < M$ que oscila con ella y gira con el disco. El sistema se detiene en pocas vueltas y sólo queda la oscilación de la masa m en un plano vertical. El momento angular inicial respecto al eje ha desaparecido. La energía cinética inicial se ha transferido a la oscilación de m .

3. Sistema mecánico rotativo que crea o destruye momento angular partiendo del reposo inicial, o modificando el que poseía hasta alcanzar una rotación estable aumentando o disminuyendo el momento angular inicial respecto al eje vertical de giro. Este aparato está formado por un disco de masa M que puede girar respecto a su eje vertical con rozamiento despreciable; en él va montado un motor eléctrico (cuya masa forma parte de M) de eje asimismo vertical paralelo al anterior. Este motor mueve, de forma excéntrica, una masa $m < M$ mediante un brazo horizontal. La batería de alimentación de $4.5V$ está fijada también al volante (y su masa forma parte de M). Esta prueba se realizó por primera vez y se registró en 1984.

4. Motor rotativo sin cigüeñal ni bielas, basado en la transformación de la energía de un pistón, en su correspondiente cilindro, sin acudir al mecanismo de biela-manivela u otros análogos. Se han construido dos modelos distintos. Barcelona, 1989.

5. Propulsor lineal sin reacción. Está basado en que $m = m(t)$ en esta ND y en el “desacoplamiento” de fuerzas mediante disipación de energía cinética, por rozamiento, entre dos de las masas que componen el sistema (necesariamente tres o más). Se construyeron numerosos modelos, basados en las posibilidades que abre la ND, siempre con resultados negativos. En mayo de 1988 se descubrió, experimentalmente, la necesidad de disipar una parte de la energía cinética del sistema para deshacer el “acoplamiento” de las fuerzas previstas por la ND. De esta forma se lograba que la resultante en CM del sistema fuera no nula; esta posibilidad está corroborada por la teoría, pues estas fuerzas dependen de la velocidad de cada una de las masas que lo componen. Suponiendo que el propulsor lineal sin reacción (PLSR) está compuesto por tres masas m_1, m_2, m_3 , que interaccionan sobre la misma trayectoria recta mediante energías potenciales y cinéticas; además de las fuerzas de aceleración, previstas por la DC cuya resultante es nula, deberán presentarse, en este caso particular, las fuerzas de la ND:

$$(1/2)\sum(dm_i/dt)v_i s \quad (42)$$

siendo s un *versor* según la recta común de acción. Debido al “acoplamiento” esta resultante también es nula con lo que no se observa

propulsión alguna; sin embargo, disipando energía cinética por rozamiento recíproco entre dos de las masas, variarán sus respectivas velocidades pero no afectará necesariamente a la velocidad de la tercera masa (o lo hará en proporción muy diferente), de esta forma la resultante (42) ya no será nula: se han “desacoplado” las fuerzas de la ND y es posible este PLSR. Con este descubrimiento fundamental se logró superar las dificultades. Desde entonces se han construído máquinas cada vez más eficientes; las últimas son muy recientes (1993), están alimentadas por baterías ($3V$) y pequeños motores eléctricos de alto rendimiento; alcanzan velocidades entre 15 y 40 m/min. sobre la tercera masa de disipación recíproca que completa el sistema. Se observa claramente –mediante el adecuado dispositivo que aísle el sistema total– que no existe reacción, es decir, se *crea momento lineal*. Los insectos voladores se propulsan y sustentan según prevé esta ND. Citamos en el siguiente apartado el estado de las investigaciones acerca del vuelo de los insectos, reseñado en un artículo nuestro del que reproducimos sus conclusiones finales.

6. *Conclusiones y aplicaciones físicas de la ND:*

a) El proceso expositivo lógico nos lleva a conclusiones y aplicaciones a partir de los principios y leyes teóricos establecidos; sin embargo la creatividad, la búsqueda, la síntesis, siguen el camino inverso en no pocas ocasiones. En el presente trabajo así ha sucedido, de forma que este capítulo corresponde, por lo menos en parte, a un conjunto de hechos experimentales que condujeron al análisis teórico de los principios y leyes que los rigen.

Las *leyes de conservación* de la DC dan cuenta de la mayoría de procesos corrientes, por lo menos con suficiente aproximación (por ej: el movimiento de los planetas y sus satélites) y otros factores tales como el rozamiento, la viscosidad, los regímenes turbulentos, etc., enmascaran el problema cuando debieran tomarse en consideración los efectos que se desprenden de las especulaciones teóricas precedentes. Ésta sería, en nuestra opinión, la causa de que no se hubieran formulado a su debido tiempo las *Tres leyes Fundamentales de la Dinámica* que hemos expuesto y desarrollado.

La Metafísica aristotélico-tomista, reclamaba una mejor consideración y aprecio de los aspectos cualitativos del Cosmos –de la Dinámica en particular– que sólo la afirmación de la accesibilidad y objetivabilidad de la *esencia* de las cosas, en las mismas cosas, podía

suministrar. Las “metafísicas trascendentales” –que preferiría denominar pseudo-metafísicas– nos apartan del Mundo y, en consecuencia, sólo nos ayudan a profundizar en conocimientos derivados de las leyes y cualidades que ya conocemos, pero –en sentido estricto– pueden “perderse soluciones” si no tomamos en consideración algunas cualidades de la *cosa en sí*, que no tienen por qué darnos, necesariamente, los modelos de la realidad basados en apriorismos inmanentistas.

b) En uno de los primeros trabajos registrados, en que se intuía esta Nueva Dinámica que presentamos aquí, llegábamos a la conclusión –por un camino totalmente heurístico y no exento de errores, por desconocimiento total entonces de la ND– de que era posible burlar las leyes de conservación del *momento angular* y de la *cantidad de movimiento* en un sistema cerrado y libre de vínculos. En la ND, como ya se ha dicho, es fácil construir sistemas que no conserven el momento angular; para la no conservación del momento lineal es preciso, como ya se ha indicado, que exista *disipación* de energía cinética por *radiación* para desacoplar las fuerzas actuantes sobre el sistema, de lo contrario su resultante es nula y no es posible esta “propulsión sin reacción”.

Esto nos sugirió la posibilidad de que en la Naturaleza existieran seres vivos cuya movilidad estuviera basada en las *Tres Leyes Fundamentales* de la ND. La respuesta más clara está, en nuestra opinión, en el vuelo de la mayoría de insectos, cuyo aleteo alcanza frecuencias muy elevadas, con un número de REYNOLDS bajísimo que prohíbe la sustentación basada en la aerodinámica conocida. En el apartado que sigue se citan algunos ejemplos y afirmaciones al respecto, entresacados de las publicaciones más recientes.

c) En el diminuto insecto *Haplothrips verbasci*, se observa que sus dos pares de “alas” no son más que barras batientes de sección aproximadamente elíptica, provistas de finísimos y muy flexibles cilios, que no pueden servir de superficie de sustentación sino que su finalidad sería –en nuestra opinión– más bien evitar la resistencia del aire al disminuir el rozamiento y facilitar el régimen laminar; la rapidísima oscilación de las alas-barra perdería eficacia al producirse turbulencias. En el apartado dedicado a “discusión e indicaciones” de uno de dichos trabajos se afirma: “El desconocimiento de los detalles acerca del mecanismo de vuelo, a tan bajo número de REYNOLDS, indica la necesidad de extensas observaciones, durante el vuelo, para determinar el movimiento de las alas-barra y de los cilios y asimismo la necesidad de profundizar en los estudios

de los detalles por medio del microscopio electrónico, y también de mediciones encaminadas a precisar las propiedades físicas del conjunto de cilios...” Otro estudio termina con las siguientes palabras: “por lo tanto, se debe concluir que se posee poca y fidedigna información acerca de las fuerzas aerodinámicas generadas en el batir de alas y que el problema se debe poner de nuevo en estudio”. Y en la publicación *Scientific American*, en un artículo dedicado a la sustentación –fuera de lo corriente– de determinados insectos, se afirma: “El aspecto más importante, (la sustentación de) esos insectos y otros voladores que yo he discutido, depende en buena parte de efectos aerodinámicos no estacionarios, hasta el presente desconocidos, que para ellos son beneficiosos y no un estorbo, como lo serían en los aeroplanos fabricados por el hombre”.

Es evidente, pues, el desconocimiento acerca del vuelo y sustentación de los insectos. Si no existe error en todo lo expuesto y en las pruebas experimentales realizadas, la explicación resulta clara y sencilla en el marco de la ND aquí presentada: volarían aún en la ausencia de atmósfera o, por lo menos, buena parte de su sustentación y maniobra se debe a las fuerzas, adicionales a las de la DC, que contempla la ND; el aire actúa fundamentalmente para posibilitar la función respiratoria.

Nota final:

El presente trabajo es, como se indica en la Introducción, la segunda edición, corregida y reformada, del publicado en 1976. Los estudios más recientes, acerca del vuelo de los insectos, siguen aproximadamente en el mismo nivel de estancamiento que en 1975. Podemos indicar aquí que en mayo de 1977, con posteridad, por tanto, a este artículo, se realizaron pruebas de hacer volar insectos (Himenópteros: *Bombus terrestris* y dípteros: *Calliphora vomitoria*) en atmósfera muy enrarecida (13 mb , equivalente al 98,7 % de la presión atmosférica normal: 1013 mb). Esta experiencia se ha repetido después varias veces. Véase al respecto nuestro pequeño artículo: *El vuelo del abejorro*, en “Investigación y Ciencia”, Febrero de 1986, pág. 41.

En la revista “Nature”, vol. 344, 5 de Abril de 1990, aparece un interesante estudio: *Unconventional aerodynamics*, por ROLAND ENNOS, que expresa con

claridad los problemas de la investigación más reciente. A modo de ilustración entresacamos algunos fragmentos: “More evidence has appeared showing that insects fly by mechanisms quite unlike those used by aeroplanes and helicopters. ZANKER and GOTZ have measured the instantaneus forces produced by tethered *Drosophila melanogaster* flies and find that they cannot be explained by conventional aerodynamic theory. The forces are also evidence that these flies have unusual methods for producing lift... Studies over the past twenty years of the aerodynamics of insects in free flight have usually concluded that the forces resulting from a conventional lift mechanism would not be adequate to support or propel the insect, and this has been verified by the results of ZANKER and GOTZ...” y termina el articulo diciendo: “Their results have two important implications. First, it is clear that to solve the problem of how insects control their flight will be extremely difficult; even if we discover exactly how the large numbers of direct flight muscles control the fine details of wing movement, we will not be able to solve this problem until we have a better understanding of unsteady aerodynamics. Second, studies of the aerodynamics of aerofoils in unsteady motion are urgently needed. Such investigation might not only clarify how animals fly, but would help us to improve our own aerodynamic designs; insects and birds are, after all, far more manoeuvrable than helicopters and aeroplanes.”

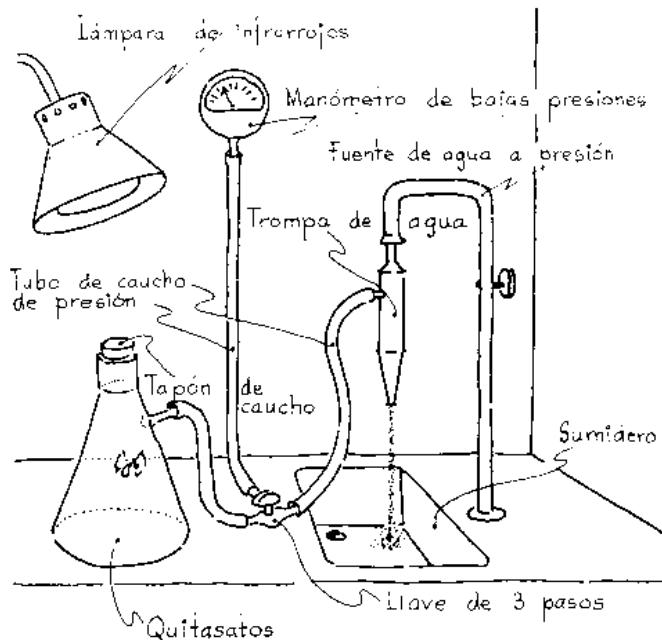
7. *El vuelo del abejorro.* Artículo publicado en “Investigación y Ciencia”, Febrero de 1986. Transcribimos a continuación este trabajo completo con la correspondiente ilustración (ver Fig. 3):

SIKORSKY, famoso diseñador aeronáutico, había mandado colocar el siguiente rótulo en el vestíbulo de su oficina técnica: “el abejorro, según los cálculos de nuestros ingenieros, no puede volar en absoluto, pero el abejorro no lo sabe y vuela”. Son bastantes los estudios acerca del vuelo de muchos insectos y todos tropiezan con enormes dificultades cuando tratan de explicar los mecanismos de sustentación a través de la dinámica de fluidos estacionarios. Veamos algunos ejemplos:

TORKEL WEIS-FOGH escribía hace once años (en 1975) en *Scientific American* que “el aspecto más importante (la sustentación) de esos insectos y otros voladores dependía en buena parte de efectos aerodinámicos no estacionarios, hasta el presente desconocidos, que para ellos son beneficiosos y no un estorbo como lo serían en los aeroplanos fabricados por el hombre”. En otro trabajo sobre el *Haplothrips verbasci*, ARNOLD M. KUETHE se expresaba en términos parecidos: “El desconocimiento de los detalles acerca del mecanismo de vuelo, a tan bajo número de REYNOLDS, indica la necesidad de extensas observaciones durante el vuelo para determinar el movimiento de las alas-barra y de los cilios y, asimismo, la necesidad de profundizar en el estudio de los detalles por medio del microscopio electrónico, y también de mediciones encaminadas a precisar las propiedades del conjunto de cilios...”

Podríamos añadir numerosísimos testimonios más. El lector encontrará un claro planteamiento del problema en el artículo que JOEL G. KINGSOLVER publicó en estas mismas páginas sobre la ingeniería de la mariposa (Octubre de 1985). Entre otras cosas describía las dificultades halladas en el complejo vuelo de los insectos, muchas de ellas insalvables, recurriendo de nuevo a las hipótesis de TORKEL WEIS-FOGH.

He venido investigando, desde hace años, empírica y teóricamente, en un nuevo planteamiento de la dinámica del que la clásica sería un capítulo restringido. Entre otras cosas nos abre la posibilidad de que exista propulsión y sustentación incluso en ausencia de atmósfera. En efecto, ¿Cómo explicar, desde el punto de vista dinámico, el vuelo de los insectos?. Evidentemente no es razonable en el marco de la dinámica newtoniana en el que la conservación del momento lineal, en un sistema aislado, prohíbe este tipo de sustentación y propulsión.



Vuelo del insecto en el vacío. Montaje del experimento.

Fig. 3

En el campo de la cosmología se detectaron, ya hace muchos años, las insuficiencias teóricas de la mecánica newtoniana en sus axiomas de partida. Así, el “Primer Principio” afirma que un punto material (o un sistema) aislado describe una trayectoria recta con velocidad constante; pero el movimiento debe estar referido a unos ejes coordenados iniciales, que son externos al punto material (o sistema) considerado, con lo que el aislamiento que se postula queda en entredicho, pues nos conduce a la afirmación contradictoria de que un sistema aislado goza de la propiedad de no estar aislado. Este es “el punto más débil del soberbio edificio de la mecánica newtoniana” (P. HOENEN, 1948). Es necesario corregir este primer principio afirmando que no existen sistemas inercialmente aislados.

Con este nuevo punto de partida, unido al axioma de la conservación de la energía, se inicia la elaboración de esta nueva dinámica comenzando por el caso más sencillo en que la energía potencial es conservativa, para generalizarlo, en un segundo paso, al caso no conservativo. Nos conduce al sorprendente resultado de que, además de las fuerzas de inercia newtonianas, en las que sólo intervienen las aceleraciones de las partículas y sus respectivas masas, existen otras fuerzas de inercia –hasta ahora

desconocidas— en las que intervienen, además, las velocidades de las partículas, cuya masa puede comportarse como no constante en el caso no conservativo. Estas fuerzas resultan ser isomórficas con la “fuerza de LORENTZ” del electromagnetismo, cuyo origen es puramente empírico.

En el caso conservativo, la partícula queda afectada tan sólo de una fuerza adicional a las clásicas: *fuerza de arrastre* la hemos llamado, que se superpone a la newtoniana y es normal a la trayectoria; goza de la cualidad de cambiar de signo cuando el punto material invierte el sentido de su movimiento sobre la trayectoria. Tenemos un ejemplo en el cometa HALLEY, que podría presentar asimetría a su paso por el perihelio, es decir, el arco de entrada puede no ser idéntico al de salida.

Vayamos a la observación empírica. Nos servirá de banco de prueba el abejorro, *Bombus terrestris*. El utillaje con el que contemplé la sustentación “anormal” del insecto en el vacío, constaba de una bomba de vacío, un recipiente de cristal, una válvula de tres vías y un manómetro de precisión (*véase la ilustración adjunta*). La bomba de vacío debe ser de las conocidas con el nombre de “trompas de agua”, empleadas para filtrado en los laboratorios de química. No debe emplearse ningún otro tipo de bomba por una razón muy simple: es del todo necesario mantener la presión parcial de vapor de agua a la temperatura ambiente, con el fin de que el insecto no se hinche ni se deformé, como ocurriría si usáramos otro tipo de bomba aunque el vacío que se consiga sea más elevado. Además, gracias a su rapidez y eficacia, el insecto mantiene sus posibilidades de acción en el vacío durante uno o dos minutos como máximo. A la temperatura ambiente de 15 grados CELSIUS, se consigue un vacío de 10 tor (13 milibares) que frente al valor normal de la presión atmosférica (1013 milibares) supone un vacío del 98,7 %.

Como recipiente de cristal transparente, donde colocar el insecto, es muy adecuado un “quitasatos” de 1000 centímetros cúbicos, con un cerramiento hermético de caucho y una salida lateral donde enchufar el tubo de presión, también de caucho, para hacer el vacío en el momento oportuno. No interesan recipientes mayores que el indicado, con el fin de minimizar el tiempo de vaciado -unos diez segundos- y así disponer del máximo período de observación. El insecto se introduce por la abertura superior y luego se cierra herméticamente.

La válvula, de las llamadas de “tres pasos” –las hay muy simples y baratas fabricadas en cristal–, intercalada en la tubería de presión, conecta la bomba de vacío con la salida lateral del “quitasatos”. Esta válvula nos permite restablecer la presión atmosférica en el recipiente, después de

haber hecho el vacío, sin necesidad de desconectar la bomba, y mantener el vacío por tiempo indefinido una vez realizado. Sirve también para comprobar el nivel de vacío logrado, mediante un manómetro conectado en derivación. Por lo que al manómetro de bajas presiones se refiere, son muy seguros los de mercurio o bien los manómetros de precisión con lectura digital.

Es sabido que los insectos activan su capacidad de vuelo si alcanzan la temperatura adecuada. (Bueno será, pues, colocar cerca del recipiente una lámpara tipo “flexo”, que además de iluminar proporciona el suficiente calor por radiación).

Los resultados observacionales a que se llega son sorprendentes: durante uno o dos minutos el insecto sigue volando, o arranca a volar, sin diferencia perceptible con el vuelo a la presión atmosférica normal, incluso el tipo de vuelo en flotación, sin movimiento en sentido vertical ni horizontal. La posición de las patas del insecto es la habitual en vuelo, esto es, recogidas y plegadas hacia atrás.

La frecuencia de aleteo es una característica de cada insecto que varía entre límites muy estrechos en cada especie: alrededor de *300 hertz* para el abejorro y *150 hertz* para la mosca. La sustentación tiene una variación aproximadamente lineal con la densidad del fluido, de modo que el vuelo en estas condiciones –si lo quisiéramos explicar aerodinámicamente– supondría que el insecto es capaz de levantar un peso casi *100* veces superior al propio a la presión atmosférica normal; lo que no parece científicamente admisible.

En el caso del vuelo de los insectos el problema es, en general, no conservativo y en esta Nueva Dinámica –que hemos presentado en sus líneas genéricas al comienzo del presente artículo– aparecen fuerzas, hasta el presente desconocidas, responsables de su sustentación y propulsión (sin necesidad de aire) que permiten la explicación del hecho empírico que presentamos. Esto es consecuencia de que en este nuevo planteamiento dinámico no rigen, en general, las leyes de conservación del momento lineal y del momento angular.

La dinámica clásica sigue siendo perfectamente aplicable a aquellos casos en que el sistema se comporta *como si* estuviera inercialmente aislado, por simetrías, aceleración tangencial nula, órbita circular, etc., o bien las nuevas fuerzas resultan despreciables respecto a las debidas exclusivamente a las masas y aceleraciones de las partículas.

La *irreversibilidad* termodinámica “el extraño y molesto segundo principio” (J. MERLEAU-PONTY) incompatible con la dinámica clásica (teorema de MISRA-POINCARÉ), queda de manifiesto como corolario del nuevo planteamiento dinámico, así como el dualismo *partícula-onda*. Las ecuaciones de MAXWELL del electromagnetismo son deducidas como un caso particular límite de esta ND. Es de notar que D. W. SCIAMA en 1953, FÉLIX TISSERAND 80 años antes y, más recientemente, BRANS y DICKE, intentaron un proceso inverso: construir una teoría de gravitación isomórfica con el electromagnetismo de MAXWELL.

Barcelona, 31 de Mayo de 1996

© JUAN RIUS-CAMPS
DEPÓSITO LEGAL:
B - 2117 - 1985
11 - ENERO - 1985

Juan RIUS – CAMPS,

Doctor Arquitecto,
Profesor de la UNIVERSIDAD DE NAVARRA.
Miembro de la REAL SOCIEDAD ESPAÑOLA DE
FISICA.

Dirección:

Gran Via de Carlos III, 59, 2º, 4^a,
08028, BARCELONA.

E-mail jsriuscamps@coac.net
E-mail john@irrevresiblesystems.com

Tel : 93 - 330 10 69

Revisado, Barcelona, 26 de Febrero de 2009

